数学演習（２つの円）R１．６．１５　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　)

1．2 円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ ……①，$x^2+y^2-8x-4y+4=0$ ……② について

(1) 円 ① と円 ② が内接するとき，定数 r の値を求めよ。

(2) 円 ① と円 ② が異なる 2 点で交わるとき，定数 r の値の範囲を求めよ。

2．(1) 中心が点 $(7,\ -1)$ で，円 $x^2+y^2+10x-8y+16=0$ と接する円の方程式を求めよ。

(2) 2 円 $C_1：x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$，$C_2：x^2+y^2-6x+8y+16=0$ が共有点をもつとき，定数 r の値の範囲を求めよ。

3．2 つの円 $x^2+y^2=5$ ……①，$x^2+y^2+4x-4y-1=0$ ……② について

(1) 2 円の共有点の座標を求めよ。

(2) 2 円の共有点と点 $(1,\ 0)$ を通る円の中心と半径を求めよ。

4．2 つの円 $x^2+y^2-10=0$，$x^2+y^2-2x-4y=0$ について

(1)　2 つの円は異なる 2 点で交わることを示せ。

(2)　2 円の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

(3)　2 円の 2 つの交点と点 $(2,\ 3)$ を通る円の中心と半径を求めよ。

5．(1)　円 $x^2+y^2=25$ と直線 $y=x+1$ の 2 つの交点と原点 O を通る円の方程式を求めよ。

(2)　円 $x^2+y^2-2kx-4ky+16k-16=0$ は定数 k の値にかかわらず 2 点を通る。この 2 点の座標を求めよ。

6．円 C_1： $x^2+y^2=4$ と円 C_2：$(x-5)^2+y^2=1$ の共通接線の方程式を求めよ。

数学演習（２つの円）Ｒ１．６．１５　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．2 円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ …… ①，$x^2+y^2-8x-4y+4=0$ …… ② について

(1)　円 ① と円 ② が内接するとき，定数 r の値を求めよ。

(2)　円 ① と円 ② が異なる 2 点で交わるとき，定数 r の値の範囲を求めよ。

解答　(1)　$r=4+2\sqrt{5}$　　(2)　$2\sqrt{5}-4<r<2\sqrt{5}+4$

解説

円 ① の中心は点 $(0,\ 0)$，半径は r である。

円 ② の方程式を変形すると　$(x-4)^2+(y-2)^2=4^2$

ゆえに，円 ② の中心は点 $(4,\ 2)$，半径は 4 である。

よって，2 円 ①，② の中心間の距離は　$\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

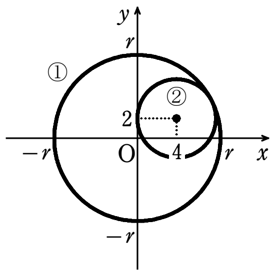
(1)　円 ① と円 ② が内接するための条件は

$$|r-4|=2\sqrt{5}$$

ゆえに　$r-4=\pm 2\sqrt{5}$

よって　$r=4\pm 2\sqrt{5}$

$r>0$ であるから　$r=4+2\sqrt{5}$



注意　2 円 ①，② が内接するとき

[1]　円 ① が円 ② の内部にある。

[2]　円 ② が円 ① の内部にある。

の 2 つの場合が考えられるが，この問題では，円 ① の中心 $(0,\ 0)$ は円 ② の外部にあるから，[1] の場合は起こりえない。

(2)　円 ① と円 ② が異なる 2 点で交わるための条件は

$$|r-4|<2\sqrt{5}<r+4,\ r>0$$

$|r-4|<2\sqrt{5}$ から

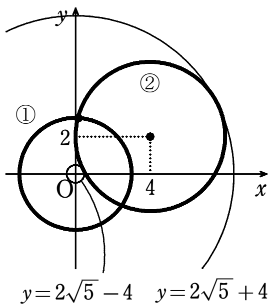
$$4-2\sqrt{5}<r<4+2\sqrt{5}\ \cdots\cdots [\mathrm{A}]$$

$2\sqrt{5}<r+4$ から

$$2\sqrt{5}-4<r\ \cdots\cdots [\mathrm{B}]$$

[A]，[B] と $r>0$ の共通範囲を求めて

$$2\sqrt{5}-4<r<2\sqrt{5}+4$$



2．(1)　中心が点 $(7,\ -1)$ で，円 $x^2+y^2+10x-8y+16=0$ と接する円の方程式を求めよ。

(2)　2 円 C_1：$x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$，C_2：$x^2+y^2-6x+8y+16=0$ が共有点をもつとき，定数 r の値の範囲を求めよ。

解答　(1)　$(x-7)^2+(y+1)^2=64$，$(x-7)^2+(y+1)^2=324$　　(2)　$2\leqq r\leqq 8$

解説

(1)　円 $x^2+y^2+10x-8y+16=0$ を C_1 とし，求める円を C_2 とする。

円 C_1 の方程式から　$(x+5)^2+(y-4)^2=25$

ゆえに，円 C_1 の中心は点 $(-5,\ 4)$，半径 は 5 である。

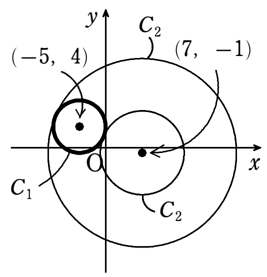
次に，2 円 C_1，C_2 の中心間の距離を d とすると

$$d=\sqrt{(7+5)^2+(-1-4)^2}=13\ \cdots\cdots ①$$

円 C_2 の中心 $(7,\ -1)$ は円 C_1 の外部にあるから，2 円 C_1，C_2 が接するのは，次の 2 つの場合が考えられる。

[1]　2 円 C_1，C_2 が外接する。

[2]　円 C_1 が円 C_2 の内部にあって，2 円が内接する。



円 C_2 の半径を r とすると，求める条件は

[1] の場合　$d=5+r$　　① から　$r=8$

[2] の場合　$d=r-5$　　① から　$r=18$

したがって，求める円の方程式は

$$(x-7)^2+(y+1)^2=64,\ (x-7)^2+(y+1)^2=324$$

(2)　円 C_1 の中心は O $(0,\ 0)$，半径は r である。

円 C_2 の方程式を変形すると　$(x-3)^2+(y+4)^2=9$

よって，円 C_2 の中心は C $(3,\ -4)$，半径は 3 である。

ゆえに，2 円の中心間の距離は

$$\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$$

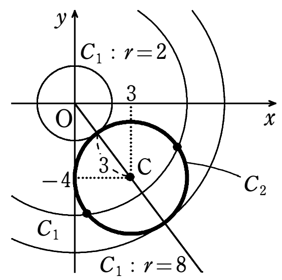
よって，求める条件は　$|r-3|\leqq 5\leqq r+3$

$|r-3|\leqq 5$ から　$-5\leqq r-3\leqq 5$

ゆえに　$-2\leqq r\leqq 8$　…… ①

$5\leqq r+3$ から　$2\leqq r$　…… ②

①，② と $r>0$ の共通範囲を求めて　$2\leqq r\leqq 8$



3．2 つの円 $x^2+y^2=5$ …… ①，$x^2+y^2+4x-4y-1=0$ …… ② について

(1)　2 円の共有点の座標を求めよ。

(2)　2 円の共有点と点 $(1,\ 0)$ を通る円の中心と半径を求めよ。

解答　(1)　$(1,\ 2)$，$(-2,\ -1)$　　(2)　中心 $(-1,\ 1)$，半径 $\sqrt{5}$

解説

(1)　②−① から　$4x-4y-1=-5$

よって　$y=x+1$　…… ③

③ を ① に代入して　$x^2+(x+1)^2=5$

整理して　$x^2+x-2=0$

ゆえに　$(x-1)(x+2)=0$　　よって　$x=1,\ -2$

③ から　$x=1$ のとき　$y=2$，　$x=-2$ のとき　$y=-1$

したがって，共有点の座標は　$(1,\ 2)$，$(-2,\ -1)$

(2)　k を定数として，次の方程式を考える。

$$k(x^2+y^2-5)+x^2+y^2+4x-4y-1=0\ \cdots\cdots [\mathrm{A}]$$

[A] は，(1) で求めた 2 円 ①，② の共有点を通る図形を表す。

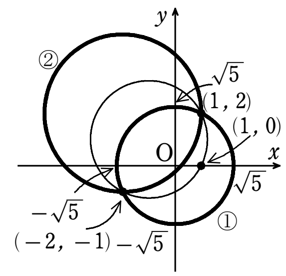
図形 [A] が点 $(1,\ 0)$ を通るとして，[A] に $x=1$，$y=0$ を代入すると　$-4k+4=0$　　よって　$k=1$

これを [A] に代入すると　$2x^2+2y^2+4x-4y-6=0$

ゆえに　$x^2+y^2+2x-2y-3=0$

すなわち　$(x+1)^2+(y-1)^2=5$

したがって　中心 $(-1,\ 1)$，半径 $\sqrt{5}$



4．2 つの円 $x^2+y^2-10=0$，$x^2+y^2-2x-4y=0$ について

(1)　2 つの円は異なる 2 点で交わることを示せ。

(2)　2 円の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

(3)　2 円の 2 つの交点と点 (2，3) を通る円の中心と半径を求めよ。

解答　(1)　略　　(2)　$x+2y-5=0$　　(3)　中心 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$，半径 $\dfrac{5}{2}$

解説

(1)　円 $x^2+y^2-10=0$ の中心は点 (0，0)，半径は $\sqrt{10}$

円 $x^2+y^2-2x-4y=0$ について，方程式を変形すると　$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

ゆえに，中心は点 (1，2)，半径は $\sqrt{5}$

よって，中心間の距離は　$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

また，$\sqrt{10}-\sqrt{5}=\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)<\sqrt{5}\cdot 1$ であるから

$\sqrt{10}-\sqrt{5}<\sqrt{5}<\sqrt{10}+\sqrt{5}$

したがって，2 つの円は異なる 2 点で交わる。

(2)　k を定数として，次の方程式を考える。

$k(x^2+y^2-10)+x^2+y^2-2x-4y=0$　……［A］

［A］は，与えられた 2 つの円の交点を通る図形を表す。

$k=-1$ のとき，［A］は　$-2x-4y+10=0$　すなわち　$x+2y-5=0$

これは直線を表すから，求める直線の方程式である。

(3)　［A］が点 (2，3) を通るとして，［A］に $x=2$，$y=3$ を代入すると　$3k-3=0$

ゆえに　$k=1$

［A］に代入して整理すると　$x^2+y^2-x-2y-5=0$

すなわち　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{25}{4}$

したがって　中心 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$，半径 $\dfrac{5}{2}$

5．(1)　円 $x^2+y^2=25$ と直線 $y=x+1$ の 2 つの交点と原点 O を通る円の方程式を求めよ。

(2)　円 $x^2+y^2-2kx-4ky+16k-16=0$ は定数 k の値にかかわらず 2 点を通る。この 2 点の座標を求めよ。

解答　(1)　$x^2+y^2+25x-25y=0$　　(2)　(0，4)，$\left(\dfrac{16}{5},\ \dfrac{12}{5}\right)$

解説

(1)　k を定数として，次の方程式を考える。

$k(x-y+1)+x^2+y^2-25=0$　……①

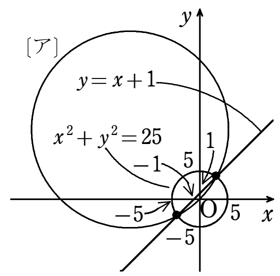
① は，円と直線の 2 つの交点を通る図形を表す。

図形 ① が原点を通るとして，① に $x=0$，$y=0$ を代入すると　$k-25=0$　ゆえに　$k=25$

① に代入して　$25(x-y+1)+x^2+y^2-25=0$

整理すると　$x^2+y^2+25x-25y=0$　……［ア］

これは円を表すから，求める方程式である。



(2)　円の方程式を k について整理すると

$-2(x+2y-8)k+x^2+y^2-16=0$

この等式が k の値に関係なく成り立つための条件は

$x+2y-8=0$ ……①，$x^2+y^2-16=0$ ……②

①，② から x を消去して　$5y^2-32y+48=0$

ゆえに　$(y-4)(5y-12)=0$　　よって　$y=4,\ \dfrac{12}{5}$

① から　$y=4$ のとき　$x=0$，$y=\dfrac{12}{5}$ のとき　$x=\dfrac{16}{5}$

ゆえに，求める 2 点の座標は　(0，4)，$\left(\dfrac{16}{5},\ \dfrac{12}{5}\right)$

6．円 C_1：$x^2+y^2=4$ と円 C_2：$(x-5)^2+y^2=1$ の共通接線の方程式を求めよ。

解答　$3x\pm 4y=10$，$x\pm 2\sqrt{6}\,y=10$

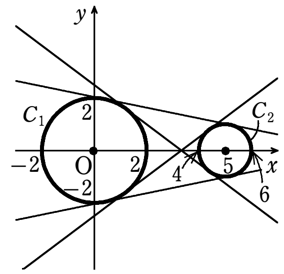
解説

円 C_1 上の接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると

$x_1{}^2+y_1{}^2=4$　……①

接線の方程式は　$x_1x+y_1y=4$　……②

直線 ② が円 C_2 に接するための条件は，円 C_2 の中心 (5，0) と直線 ② の距離が，円 C_2 の半径 1 に等しいことであるから　$\dfrac{|5x_1-4|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}=1$



① を代入して整理すると　$|5x_1-4|=2$

よって　$5x_1-4=\pm 2$　　したがって　$x_1=\dfrac{6}{5},\ \dfrac{2}{5}$

$x_1=\dfrac{6}{5}$ のとき，① から　$y_1{}^2=\dfrac{64}{25}$　　ゆえに　$y_1=\pm\dfrac{8}{5}$

$x_1=\dfrac{2}{5}$ のとき，① から　$y_1{}^2=\dfrac{96}{25}$　　よって　$y_1=\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$

ゆえに，② から，求める接線の方程式は

$\dfrac{6}{5}x\pm\dfrac{8}{5}y=4$，$\dfrac{2}{5}x\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{5}y=4$　すなわち　$3x\pm 4y=10$，$x\pm 2\sqrt{6}\,y=10$

別解　共通接線の方程式を $y=mx+n$ とすると，これが円 C_1，C_2 に接する条件は，

それぞれ　$\dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$，$\dfrac{|5m+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

したがって　$|n|=2\sqrt{m^2+1}$，$|5m+n|=\sqrt{m^2+1}$　……［ア］

よって　$|n|=2|5m+n|$　　ゆえに　$n=-10m$　または　$3n=-10m$

このようにして，一方の文字を消去し，連立方程式［ア］を解く。