数学演習（直線上の点•平面上の点）R１．６．１１

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．数直線上の 3 点 A(-2), B(1), C(5) について，線分 AB を 3 : 2 に内分する点を P，3 : 2 に外分する点を Q，2 : 3 に外分する点を R，線分 AB の中点を M とする。

(1)　線分 AB，CA の長さを求めよ。

(2)　点 P，Q，R，M の座標を，それぞれ求めよ。

(3)　点 A は，線分 RB を ${}^{ア}\boxed{}$: ${}^{イ}\boxed{}$ に内分し，線分 CQ を ${}^{ウ}\boxed{}$: ${}^{エ}\boxed{}$ に外分する。

2．(1)　2 点 A$(3,\ -5)$，B$(-1,\ 3)$ 間の距離を求めよ。

(2)　2 点 A$(1,\ -2)$，B$(-3,\ 4)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めよ。

(3)　3 点 A$(8,\ 9)$，B$(-6,\ 7)$，C$(-8,\ 1)$ から等距離にある点 P の座標を求めよ。

3．(1)　3 点 A$(1,\ 3)$，B$(5,\ 6)$，C$(-2,\ 7)$ を頂点とする △ABC は直角二等辺三角形であることを示せ。

(2)　3 点 A$(4,\ 0)$，B$(0,\ 2)$，C$(a,\ b)$ について，△ABC が正三角形であるとき，a，b の値を求めよ。

4. (1)　△ABC の重心を G とする。このとき，等式
$AB^2+BC^2+CA^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$ が成り立つことを証明せよ。
(2)　△ABC において，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を D とする。このとき，等式
$2AB^2+AC^2=3AD^2+6BD^2$ が成り立つことを証明せよ。

5. 3 点 A (5, 4)，B (0, −1)，C (8, −2) について，線分 AB を 2 : 3 に外分する点を P，3 : 2 に外分する点を Q とし，△ABC の重心を G とする。
(1)　線分 PQ の中点 M の座標を求めよ。
(2)　点 G の座標を求めよ。
(3)　△PQS の重心が点 G と一致するように，点 S の座標を定めよ。

6. (1)　A (7, 3)，B (−1, 5)，C (5, 1)，D を頂点とする平行四辺形 ABCD の頂点 D の座標を求めよ。
(2)　3 点 A (1, 2)，B (5, 4)，C (3, 6) を頂点とする平行四辺形の残りの頂点 D の座標を求めよ。

7. (1)　点 A (2, −1) に関して，点 P (−1, 1) と対称な点 Q の座標を求めよ。
(2)　3 点 A (a, b)，B (0, 0)，C (c, 0) と点 P (x, y) がある。A に関して P と対称な点を Q とし，B に関して Q と対称な点を R とする。C に関して R と対称な点が P と一致するとき，x，y を a，b，c を用いて表せ。

8. 座標平面上の 3 点 A (−2, 5)，B (−3, −2)，C (3, 0) がある。
(1)　線分 AB，BC の長さをそれぞれ求めよ。
(2)　∠ABC の二等分線と直線 AC との交点 P の座標を求めよ。

１．数直線上の３点 A(-2)，B(1)，C(5) について，線分 AB を $3:2$ に内分する点を P，$3:2$ に外分する点を Q，$2:3$ に外分する点を R，線分 AB の中点を M とする。

(1)　線分 AB，CA の長さを求めよ。

(2)　点 P，Q，R，M の座標を，それぞれ求めよ。

(3)　点 A は，線分 RB を ア$\boxed{}$: イ$\boxed{}$ に内分し，線分 CQ を ウ$\boxed{}$: エ$\boxed{}$ に外分する。

解答　(1)　AB$=3$，CA$=7$　　(2)　P : $-\dfrac{1}{5}$，Q : 7，R : -8，M : $-\dfrac{1}{2}$

(3)　(ア)　2　　(イ)　1　　(ウ)　7　　(エ)　9

解説

(1)　$\mathrm{AB}=|1-(-2)|=|3|=3$，$\mathrm{CA}=|(-2)-5|=|-7|=7$

(2)　P : $\dfrac{2\cdot(-2)+3\cdot1}{3+2}=-\dfrac{1}{5}$，Q : $\dfrac{-2\cdot(-2)+3\cdot1}{3-2}=7$

R : $\dfrac{-3\cdot(-2)+2\cdot1}{2-3}=-8$，M : $\dfrac{(-2)+1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

(3)　$\mathrm{RA}=|-2-(-8)|=6$，$\mathrm{AB}=3$ から

$\mathrm{RA}:\mathrm{AB}=6:3=2:1$

よって，点 A は線分 RB を ア2 : イ1 に内分する。

また　$\mathrm{CA}=|-2-5|=7$，$\mathrm{AQ}=|7-(-2)|=9$

ゆえに　$\mathrm{CA}:\mathrm{AQ}=7:9$

よって，点 A は線分 CQ を ウ7 : エ9 に外分する。

２．(1)　２点 A$(3,\ -5)$，B$(-1,\ 3)$ 間の距離を求めよ。

(2)　２点 A$(1,\ -2)$，B$(-3,\ 4)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めよ。

(3)　３点 A$(8,\ 9)$，B$(-6,\ 7)$，C$(-8,\ 1)$ から等距離にある点 P の座標を求めよ。

解答　(1)　AB$=4\sqrt{5}$　　(2)　P$\left(-\dfrac{5}{2},\ 0\right)$　　(3)　P$(2,\ 1)$

解説

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+\{3-(-5)\}^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

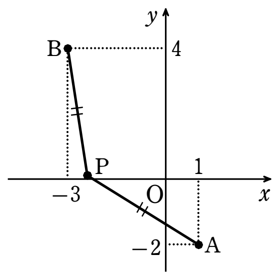
(2)　P$(x,\ 0)$ とすると，AP$=$BP すなわち $\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

から　$(x-1)^2+\{0-(-2)\}^2=\{x-(-3)\}^2+(0-4)^2$

ゆえに　$x^2-2x+1+4=x^2+6x+9+16$

これを解いて　$x=-\dfrac{5}{2}$

よって　P$\left(-\dfrac{5}{2},\ 0\right)$



(3)　P$(x,\ y)$ とすると，AP$=$BP すなわち $\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

から　$(x-8)^2+(y-9)^2=\{x-(-6)\}^2+(y-7)^2$

整理して　$7x+y-15=0$　……①

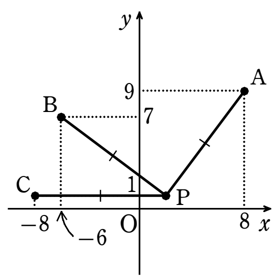
また，AP$=$CP すなわち $\mathrm{AP}^2=\mathrm{CP}^2$ から

$(x-8)^2+(y-9)^2=\{x-(-8)\}^2+(y-1)^2$

整理して　$2x+y-5=0$　……②

①，② を解くと　$x=2$，$y=1$

よって　P$(2,\ 1)$



３．(1)　３点 A$(1,\ 3)$，B$(5,\ 6)$，C$(-2,\ 7)$ を頂点とする △ABC は直角二等辺三角形であることを示せ。

(2)　３点 A$(4,\ 0)$，B$(0,\ 2)$，C$(a,\ b)$ について，△ABC が正三角形であるとき，a，b の値を求めよ。

解答　(1)　略　　(2)　$(a,\ b)=(2+\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3})$，$(2-\sqrt{3},\ 1-2\sqrt{3})$

解説

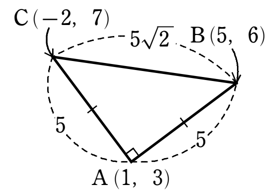
(1)　$\mathrm{AB}^2=(5-1)^2+(6-3)^2=25$

$\mathrm{AC}^2=(-2-1)^2+(7-3)^2=25$

$\mathrm{BC}^2=(-2-5)^2+(7-6)^2=50$

よって　AB$=$AC，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2$

したがって，△ABC は ∠A$=90°$ の直角二等辺三角形である。



(2)　△ ABC が正三角形であるための条件は

AB$=$BC$=$CA　すなわち　$\mathrm{AB}^2=\mathrm{BC}^2=\mathrm{CA}^2$

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{CA}^2$ から　$(0-4)^2+(2-0)^2=(4-a)^2+(0-b)^2$

整理して　$(a-4)^2+b^2=20$　……①

$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CA}^2$ から　$(a-0)^2+(b-2)^2=(4-a)^2+(0-b)^2$

整理して　$b=2a-3$　……②

② を ① に代入して　$(a-4)^2+(2a-3)^2=20$

整理して　$a^2-4a+1=0$　ゆえに　$a=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot1}=2\pm\sqrt{3}$

② から　$b=2(2\pm\sqrt{3})-3=1\pm2\sqrt{3}$　(複号同順)

よって　$(a,\ b)=(2+\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3})$，$(2-\sqrt{3},\ 1-2\sqrt{3})$

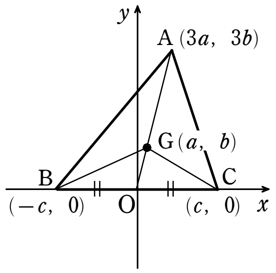
4．(1)　△ABC の重心を G とする。このとき，等式
$AB^2+BC^2+CA^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　△ABC において，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を D とする。このとき，等式
$2AB^2+AC^2=3AD^2+6BD^2$ が成り立つことを証明せよ。

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　直線 BC を x 軸に，辺 BC の垂直二等分線を y 軸にとると，線分 BC の中点は原点 O になる。
$A(3a,\ 3b)$，$B(-c,\ 0)$，$C(c,\ 0)$ とすると，G は重心であるから，$G(a,\ b)$ と表される。

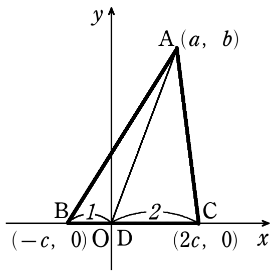


よって　$AB^2+BC^2+CA^2$
$=(-c-3a)^2+9b^2+4c^2+(3a-c)^2+9b^2$
$=3(6a^2+6b^2+2c^2)$　……①

$GA^2+GB^2+GC^2=(3a-a)^2+(3b-b)^2+(-c-a)^2$
$+b^2+(c-a)^2+b^2$
$=6a^2+6b^2+2c^2$　……②

①，② から　$AB^2+BC^2+CA^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$

(2)　直線 BC を x 軸に，点 D を通り直線 BC に垂直な直線を y 軸にとると，点 D は原点になり，$A(a,\ b)$，$B(-c,\ 0)$，$C(2c,\ 0)$ と表すことができる。



よって　$2AB^2+AC^2$
$=2\{(-c-a)^2+(-b)^2\}+(2c-a)^2+(-b)^2$
$=2(c^2+2ca+a^2+b^2)+4c^2-4ca+a^2+b^2$
$=3a^2+3b^2+6c^2$　……①
$3AD^2+6BD^2=3(a^2+b^2)+6c^2$　……②

①，② から　$2AB^2+AC^2=3AD^2+6BD^2$

5．3 点 $A(5,\ 4)$，$B(0,\ -1)$，$C(8,\ -2)$ について，線分 AB を 2 : 3 に外分する点を P，3 : 2 に外分する点を Q とし，△ABC の重心を G とする。

(1)　線分 PQ の中点 M の座標を求めよ。

(2)　点 G の座標を求めよ。

(3)　△PQS の重心が点 G と一致するように，点 S の座標を定めよ。

解答　(1)　$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$　　(2)　$\left(\dfrac{13}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$　　(3)　$(8,\ -2)$

解説

(1)　点 P の座標は　$\left(\dfrac{-3\cdot5+2\cdot0}{2-3},\ \dfrac{-3\cdot4+2\cdot(-1)}{2-3}\right)$ から　$(15,\ 14)$

点 Q の座標は　$\left(\dfrac{-2\cdot5+3\cdot0}{3-2},\ \dfrac{-2\cdot4+3\cdot(-1)}{3-2}\right)$ から　$(-10,\ -11)$

よって，線分 PQ の中点 M の座標は
$\left(\dfrac{15+(-10)}{2},\ \dfrac{14+(-11)}{2}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

(2)　点 G の座標は　$\left(\dfrac{5+0+8}{3},\ \dfrac{4+(-1)+(-2)}{3}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{13}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

(3)　$S(x,\ y)$ とすると，(1) から，△PQS の重心の座標は
$\left(\dfrac{15+(-10)+x}{3},\ \dfrac{14+(-11)+y}{3}\right)$ から　$\left(\dfrac{5+x}{3},\ \dfrac{3+y}{3}\right)$

これが点 G の座標と一致するとき　$\dfrac{5+x}{3}=\dfrac{13}{3}$，$\dfrac{3+y}{3}=\dfrac{1}{3}$

よって　$x=8$，$y=-2$　すなわち　$S(8,\ -2)$

6．(1)　$A(7,\ 3)$，$B(-1,\ 5)$，$C(5,\ 1)$，D を頂点とする平行四辺形 ABCD の頂点 D の座標を求めよ。

(2)　3 点 $A(1,\ 2)$，$B(5,\ 4)$，$C(3,\ 6)$ を頂点とする平行四辺形の残りの頂点 D の座標を求めよ。

解答　(1)　$(13,\ -1)$　　(2)　$(-1,\ 4)$，$(7,\ 8)$，$(3,\ 0)$

解説

頂点 D の座標を $(x,\ y)$ とする。

(1)　対角線 AC，BD の中点をそれぞれ M，N とすると
$M\left(\dfrac{7+5}{2},\ \dfrac{3+1}{2}\right)$，$N\left(\dfrac{-1+x}{2},\ \dfrac{5+y}{2}\right)$

点 M は点 N と一致するから　$\dfrac{12}{2}=\dfrac{-1+x}{2}$，$\dfrac{4}{2}=\dfrac{5+y}{2}$

よって　$x=13$，$y=-1$　　ゆえに　$D(13,\ -1)$

(2)　平行四辺形の頂点の順序は，次の 3 つの場合がある。
[1]　ABCD　　[2]　ABDC　　[3]　ADBC

[1] の場合，対角線は AC，BD であり，それぞれの中点を M，N とすると
$M\left(\dfrac{1+3}{2},\ \dfrac{2+6}{2}\right)$，$N\left(\dfrac{5+x}{2},\ \dfrac{4+y}{2}\right)$

M，N の座標が一致するから　$\dfrac{4}{2}=\dfrac{5+x}{2}$，$\dfrac{8}{2}=\dfrac{4+y}{2}$

これを解いて　$x=-1$，$y=4$

[2] の場合，対角線は AD，BC であり，同様にして
$\dfrac{1+x}{2}=\dfrac{8}{2}$，$\dfrac{2+y}{2}=\dfrac{10}{2}$　　よって　$x=7$，$y=8$

[3] の場合，対角線は AB，CD であり，同様にして
$\dfrac{6}{2}=\dfrac{3+x}{2}$，$\dfrac{6}{2}=\dfrac{6+y}{2}$　　よって　$x=3$，$y=0$

以上から，点 D の座標は　$(-1,\ 4)$，$(7,\ 8)$，$(3,\ 0)$

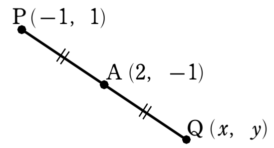
7．(1)　点 $A(2,\ -1)$ に関して，点 $P(-1,\ 1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

(2)　3 点 $A(a,\ b)$，$B(0,\ 0)$，$C(c,\ 0)$ と点 $P(x,\ y)$ がある。A に関して P と対称な点を Q とし，B に関して Q と対称な点を R とする。C に関して R と対称な点が P と一致するとき，x，y を a，b，c を用いて表せ。

解答　(1)　$(5,\ -3)$　　(2)　$x=a+c$，$y=b$

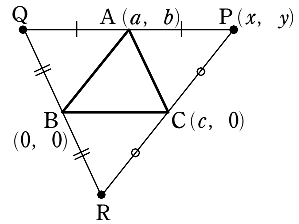
解説

(1)　点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると，点 A は線分 PQ の中点であるから　$\dfrac{-1+x}{2}=2$，$\dfrac{1+y}{2}=-1$



これを解いて　$x=5$，$y=-3$
したがって　$Q(5,\ -3)$

(2)　$Q(q_1,\ q_2)$ とすると，点 A は線分 PQ の中点であるから　$\dfrac{x+q_1}{2}=a$，$\dfrac{y+q_2}{2}=b$



ゆえに　$q_1=2a-x$，$q_2=2b-y$
すなわち　$Q(2a-x,\ 2b-y)$
次に，$R(r_1,\ r_2)$ とすると，点 B は線分 QR の中点であるから　$\dfrac{2a-x+r_1}{2}=0$，$\dfrac{2b-y+r_2}{2}=0$
ゆえに　$r_1=-2a+x$，$r_2=-2b+y$
すなわち　$R(-2a+x,\ -2b+y)$
更に，点 C は線分 RP の中点であるから
$\dfrac{-2a+x+x}{2}=c$，$\dfrac{-2b+y+y}{2}=0$
したがって　$x=a+c$，$y=b$

8．座標平面上の 3 点 $A(-2,\ 5)$，$B(-3,\ -2)$，$C(3,\ 0)$ がある。

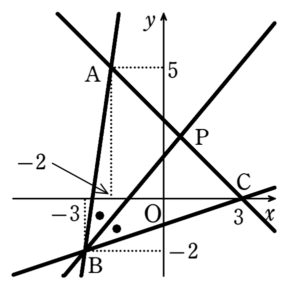
(1)　線分 AB，BC の長さをそれぞれ求めよ。

(2)　∠ABC の二等分線と直線 AC との交点 P の座標を求めよ。

解答　(1)　$AB=5\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{10}$　　(2)　$(23-10\sqrt{5},\ 10\sqrt{5}-20)$

解説

(1)　$AB=\sqrt{\{-3-(-2)\}^2+(-2-5)^2}=5\sqrt{2}$
$BC=\sqrt{\{3-(-3)\}^2+\{0-(-2)\}^2}=2\sqrt{10}$



(2)　直線 BP は ∠ABC の二等分線であるから
$AP : PC=AB : BC=5\sqrt{2} : 2\sqrt{10}=5 : 2\sqrt{5}$
よって，点 P は線分 AC を $5 : 2\sqrt{5}$ に内分する点であるから，点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=\dfrac{2\sqrt{5}\cdot(-2)+5\cdot3}{5+2\sqrt{5}}=\dfrac{15-4\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}$
$=\dfrac{(15-4\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}=\dfrac{115-50\sqrt{5}}{5}$
$=23-10\sqrt{5}$

$y=\dfrac{2\sqrt{5}\cdot5+5\cdot0}{5+2\sqrt{5}}=\dfrac{10\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}=\dfrac{10\sqrt{5}(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}=\dfrac{50\sqrt{5}-100}{5}=10\sqrt{5}-20$

よって，点 P の座標は　$(23-10\sqrt{5},\ 10\sqrt{5}-20)$