数学演習（直線の方程式）Ｒ１．６．１２　　（　）組（　）番　名前（　　　）

１．(1)　次の直線の方程式を求めよ。

（ア）　点 $(-1,\ 3)$ を通り，傾きが -2　　（イ）　点 $(4,\ 1)$ を通り，x 軸に垂直

（ウ）　点 $(5,\ 3)$ を通り，x 軸に平行

(2)　次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

（ア）　$(1,\ -2)$，$(-3,\ 4)$　　（イ）　$(-5,\ 7)$，$(6,\ 7)$

（ウ）　$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{3}{2},\ -1\right)$　　（エ）　$\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$，$\left(0,\ -\frac{1}{3}\right)$

２．点 $(-3,\ 2)$ を通り，直線 $3x-4y-6=0$ に平行な直線 ℓ と垂直な直線 ℓ' の方程式をそれぞれ求めよ。

３．2 直線 $ax+2y-a=0$ ……①，$x+(a+1)y-a-3=0$ ……② は，$a=$ ア $\boxed{}$ のとき垂直に交わる。また，$a=$ イ $\boxed{}$ のとき，2 直線 ①，② は共有点をもたず，$a=$ ウ $\boxed{}$ のとき，2 直線 ①，② は一致する。

４．2 直線 $x+5y-7=0$，$2x-y-4=0$ の交点を通り，次の条件を満たす直線の方程式を，それぞれ求めよ。

(1)　点 $(-3,\ 5)$ を通る　　(2)　直線 $x+4y-6=0$ に　（ア）　平行　（イ）　垂直

５．k は定数とする。直線 $(k+3)x-(2k-1)y-8k-3=0$ は，k の値に関係なく定点 A を通る。その定点 A の座標を求めよ。

６．3 点 A $(6,\ 13)$，B $(1,\ 2)$，C $(9,\ 10)$ を頂点とする △ABC について

(1)　点 A を通り，△ABC の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ。

(2)　辺 BC を $1:3$ に内分する点 P を通り，△ABC の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ。

7．(1)　3 点 A$(-2,\ 3)$，B$(1,\ 2)$，C$(3a+4,\ -2a+2)$ が一直線上にあるとき，定数 a の値を求めよ。

(2)　3 直線 $4x+3y-24=0$ …… ①，$x-2y+5=0$ …… ②，$ax+y+2=0$ …… ③ が 1 点で交わるとき，定数 a の値を求めよ。

8．3 直線 $x+y-7=0$，$2x-y+1=0$，$3x-ay+2a=0$ が三角形を作らないような定数 a の値を求めよ。

9．放物線 $y=x^2-x$ の頂点を P とする。点 Q はこの放物線上の点であり，原点 O$(0,\ 0)$ とも点 P とも異なるとする。$\angle$OPQ が直角であるとき，点 Q の座標を求めよ。

10．異なる 3 直線

$x+y=1$ …… ①，$3x+4y=1$ …… ②，$ax+by=1$ …… ③

が 1 点で交わるとき，3 点 $(1,\ 1)$，$(3,\ 4)$，$(a,\ b)$ は一直線上にあることを示せ。

1．(1) 次の直線の方程式を求めよ。

(ア) 点 $(-1,\ 3)$ を通り，傾きが -2　　(イ) 点 $(4,\ 1)$ を通り，x 軸に垂直

(ウ) 点 $(5,\ 3)$ を通り，x 軸に平行

(2) 次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

(ア) $(1,\ -2)$, $(-3,\ 4)$　　(イ) $(-5,\ 7)$, $(6,\ 7)$

(ウ) $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{3}{2},\ -1\right)$　　(エ) $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, $\left(0,\ -\frac{1}{3}\right)$

解答　(1) (ア) $y=-2x+1$　(イ) $x=4$　(ウ) $y=3$

(2) (ア) $y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$　(イ) $y=7$　(ウ) $x=\frac{3}{2}$　(エ) $2x-15y=5$

解説

(1) (ア) $y-3=-2\{x-(-1)\}$　すなわち　$y=-2x+1$

(イ) 通る点の x 座標が 4 であるから　$x=4$

(ウ) 通る点の y 座標が 3 であるから　$y=3$

(2) (ア) $y-(-2)=\frac{4-(-2)}{-3-1}(x-1)$　すなわち　$y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

(イ) 2 点の y 座標がともに 7 であるから　$y=7$

(ウ) 2 点の x 座標がともに $\frac{3}{2}$ であるから　$x=\frac{3}{2}$

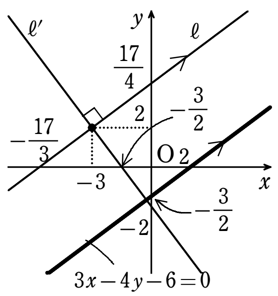
(エ) x 切片が $\frac{5}{2}$，y 切片が $-\frac{1}{3}$ であるから　$\frac{x}{\frac{5}{2}}+\frac{y}{-\frac{1}{3}}=1$

よって　$\frac{2}{5}x-3y=1$　すなわち　$2x-15y=5$

2．点 $(-3,\ 2)$ を通り，直線 $3x-4y-6=0$ に平行な直線 ℓ と垂直な直線 ℓ' の方程式をそれぞれ求めよ。

解答　$\ell : 3x-4y+17=0$，$\ell' : 4x+3y+6=0$

解説



直線 $3x-4y-6=0$ の傾きは $\frac{3}{4}$ である。

よって，直線 ℓ の傾きは $\frac{3}{4}$ であり，その方程式は

$y-2=\frac{3}{4}\{x-(-3)\}$　すなわち　$3x-4y+17=0$

次に，直線 ℓ' の傾きを m とすると，$\frac{3}{4}m=-1$ から

$m=-\frac{4}{3}$

よって，直線 ℓ' の方程式は　$y-2=-\frac{4}{3}\{x-(-3)\}$　すなわち　$4x+3y+6=0$

3．2 直線 $ax+2y-a=0$ ……①，$x+(a+1)y-a-3=0$ ……② は，$a=$ ア $\boxed{}$ のとき垂直に交わる。また，$a=$ イ $\boxed{}$ のとき，2 直線 ①，② は共有点をもたず，$a=$ ウ $\boxed{}$ のとき，2 直線 ①，② は一致する。

解答　(ア) $-\frac{2}{3}$　(イ) 1　(ウ) -2

解説

2 直線 ①，② が垂直であるための条件は

$a\cdot1+2(a+1)=0$　すなわち　$3a+2=0$

これを解いて　$a=$ ア $-\frac{2}{3}$

次に，2 直線 ①，② が平行 (一致も含む) であるための条件は

$a(a+1)-2\cdot1=0$　すなわち　$a^2+a-2=0$

ゆえに　$(a-1)(a+2)=0$　　よって　$a=1,\ -2$

$a=1$ のとき

① は　$x+2y-1=0$，　② は　$x+2y-4=0$

よって，$a=1$ のとき，2 直線 ①，② は平行で一致しないから，共有点をもたない。

$a=-2$ のとき

① は　$-2x+2y+2=0$　すなわち　$x-y-1=0$

② は　$x-y-1=0$

よって，$a=-2$ のとき，2 直線 ①，② は一致する。

したがって　イ 1，ウ -2

4．2 直線 $x+5y-7=0$，$2x-y-4=0$ の交点を通り，次の条件を満たす直線の方程式を，それぞれ求めよ。

(1) 点 $(-3,\ 5)$ を通る　　(2) 直線 $x+4y-6=0$ に　(ア) 平行　(イ) 垂直

解答　(1) $3x+4y-11=0$

(2) (ア) $11x+44y-67=0$　(イ) $44x-11y-98=0$

解説

k は定数とする。方程式 $k(x+5y-7)+2x-y-4=0$ ……① は，2 直線の交点を通る直線を表す。

(1) 直線 ① が点 $(-3,\ 5)$ を通るとき，$x=-3$，$y=5$ を ① に代入して　$15k-15=0$

これを解いて　$k=1$

$k=1$ を ① に代入して　$x+5y-7+2x-y-4=0$

よって，求める直線の方程式は　$3x+4y-11=0$

(2) ① を x，y について整理すると

$(k+2)x+(5k-1)y-7k-4=0$ ……②

(ア) 直線 ② と直線 $x+4y-6=0$ が平行であるための条件は

$(k+2)\cdot4-1\cdot(5k-1)=0$　　よって　$k=9$

これを ② に代入して　$11x+44y-67=0$

(イ) 直線 ② と直線 $x+4y-6=0$ が垂直であるための条件は

$(k+2)\cdot1+(5k-1)\cdot4=0$　　よって　$k=\frac{2}{21}$

これを ② に代入して整理すると　$44x-11y-98=0$

5．k は定数とする。直線 $(k+3)x-(2k-1)y-8k-3=0$ は，k の値に関係なく定点 A を通る。その定点 A の座標を求めよ。

解答　$(2,\ -3)$

解説

$(k+3)x-(2k-1)y-8k-3=0$ ……① とする。

① を k について整理すると

$k(x-2y-8)+3x+y-3=0$

この等式が k の値に関係なく成り立つための条件は

$x-2y-8=0$，$3x+y-3=0$

この連立方程式を解いて　$x=2$，$y=-3$

よって，求める定点 A の座標は　$(2,\ -3)$

別解　k の値に関係なく ① が成り立つから，$k=-3,\ \frac{1}{2}$ のときも成り立つ。

$k=-3$ のとき　$0\cdot x-\{2\cdot(-3)-1\}y-8\cdot(-3)-3=0$

整理して　$7y+21=0$　　よって　$y=-3$

$k=\frac{1}{2}$ のとき　$\left(\frac{1}{2}+3\right)x-0\cdot y-8\cdot\frac{1}{2}-3=0$

整理して　$\frac{7}{2}x-7=0$　　よって　$x=2$

逆に，$x=2$，$y=-3$ を ① の左辺に代入すると

$(k+3)\cdot2-(2k-1)\cdot(-3)-8k-3=0$

となり，① は k の値に関係なく成り立つ。

したがって　$x=2$，$y=-3$

よって，求める定点 A の座標は　$(2,\ -3)$

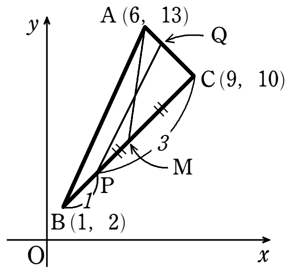
6．3 点 A$(6,\ 13)$，B$(1,\ 2)$，C$(9,\ 10)$ を頂点とする △ABC について

(1) 点 A を通り，△ABC の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ。

(2) 辺 BC を $1:3$ に内分する点 P を通り，△ABC の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ。

解答　(1) $y=7x-29$　(2) $y=2x-2$

解説



(1) 求める直線は，辺 BC の中点を通る。

この中点を M とすると，その座標は

$\left(\frac{1+9}{2},\ \frac{2+10}{2}\right)$　すなわち　$(5,\ 6)$

よって，求める直線の方程式は

$y-13=\frac{6-13}{5-6}(x-6)$

したがって　$y=7x-29$

(2) 点 P の座標は　$\left(\frac{3\cdot1+1\cdot9}{1+3},\ \frac{3\cdot2+1\cdot10}{1+3}\right)$

すなわち　$(3,\ 4)$

辺 AC 上に点 Q をとると，直線 PQ が △ABC の面積を 2 等分するための条件は

$\frac{\triangle \mathrm{CPQ}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\frac{\mathrm{CP}\cdot\mathrm{CQ}}{\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CA}}=\frac{3\mathrm{CQ}}{4\mathrm{CA}}=\frac{1}{2}$

ゆえに　$\mathrm{CQ}:\mathrm{CA}=2:3$

よって，点 Q は辺 CA を $2:1$ に内分するから，その座標は

$\left(\frac{1\cdot9+2\cdot6}{2+1},\ \frac{1\cdot10+2\cdot13}{2+1}\right)$　すなわち　$(7,\ 12)$

したがって，2 点 P，Q を通る直線の方程式を求めると

$y-4=\frac{12-4}{7-3}(x-3)$　すなわち　$y=2x-2$

7．(1) 3 点 A$(-2,\ 3)$，B$(1,\ 2)$，C$(3a+4,\ -2a+2)$ が一直線上にあるとき，定数 a の値を求めよ。

(2) 3 直線 $4x+3y-24=0$ ……①，$x-2y+5=0$ ……②，$ax+y+2=0$ ……③ が 1 点で交わるとき，定数 a の値を求めよ。

解答　(1) $a=1$　(2) $a=-2$

解説

(1) 2 点 A，B を通る直線の方程式は

$$y-3=\frac{2-3}{1-(-2)}\{x-(-2)\} \quad \text{すなわち} \quad x+3y-7=0$$

直線 AB 上に点 C があるための条件は

$$3a+4+3(-2a+2)-7=0$$

ゆえに　$-3a+3=0$　　よって　$a=1$

別解　$-2=3a+4$ すなわち $a=-2$ のとき，直線 AC の方程式は，$x=-2$ となる。

点 B は直線 $x=-2$ 上にないから，$a \fallingdotseq -2$ である。

$a \fallingdotseq -2$ として，3 点 A，B，C が一直線上にあるとき，直線 AB の傾きと直線 AC の傾きは等しいから

$$\frac{2-3}{1-(-2)}=\frac{-2a+2-3}{3a+4-(-2)} \quad \text{すなわち} \quad -\frac{1}{3}=-\frac{2a+1}{3a+6}$$

ゆえに　$3a+6=3(2a+1)$

よって　$a=1$　　これは $a \fallingdotseq -2$ を満たす。

(2)　①，② を連立して解くと　$x=3$，$y=4$

2 直線 ①，② の交点の座標は　$(3,\ 4)$

点 $(3,\ 4)$ が直線 ③ 上にあるための条件は　$a\cdot 3+4+2=0$

よって　$a=-2$

8．3 直線 $x+y-7=0$，$2x-y+1=0$，$3x-ay+2a=0$ が三角形を作らないような定数 a の値を求めよ。

解答　$a=-3,\ \frac{3}{2},\ 2$

解説

2 直線 $x+y-7=0$，$2x-y+1=0$ は平行でないから，与えられた 3 直線が三角形を作らないのは，次の [1]，[2] の場合である。

[1]　3 直線が 1 点で交わる　　[2]　2 直線が平行

[1]　3 直線が 1 点で交わる場合

連立方程式 $x+y-7=0$ ……①，$2x-y+1=0$ ……② を解くと

$$x=2,\ y=5$$

2 直線 ①，② の交点の座標は $(2,\ 5)$ である。

直線 $3x-ay+2a=0$ が点 $(2,\ 5)$ を通るための条件は

$$3\cdot 2-a\cdot 5+2a=0$$

これを解いて　$a=2$

[2]　2 直線が平行の場合

(i)　直線 $3x-ay+2a=0$ が直線 $x+y-7=0$ と平行になるための条件は

$$3\cdot 1-(-a)\cdot 1=0$$

これを解いて　$a=-3$

(ii)　直線 $3x-ay+2a=0$ が直線 $2x-y+1=0$ と平行になるための条件は

$$3\cdot(-1)-(-a)\cdot 2=0$$

これを解いて　$a=\frac{3}{2}$

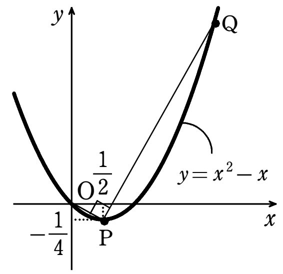
以上から，求める a の値は　$a=-3,\ \frac{3}{2},\ 2$

9．放物線 $y=x^2-x$ の頂点を P とする。点 Q はこの放物線上の点であり，原点 O $(0,\ 0)$ とも点 P とも異なるとする。∠OPQ が直角であるとき，点 Q の座標を求めよ。

解答　$\left(\frac{5}{2},\ \frac{15}{4}\right)$

解説

$$y=x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$



ゆえに，放物線 $y=x^2-x$ の頂点 P の座標は

$$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$$

よって，直線 OP の傾きは　$-\frac{1}{2}$

ここで，点 Q の座標を $(t,\ t^2-t)$ $\left(t \fallingdotseq 0,\ t \fallingdotseq \frac{1}{2}\right)$ と

すると，直線 PQ の傾きは　$\dfrac{t^2-t-\left(-\frac{1}{4}\right)}{t-\frac{1}{2}}=t-\frac{1}{2}$

∠OPQ が直角であるとき，OP⊥PQ から

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)=-1 \qquad \text{これを解いて} \qquad t=\frac{5}{2}$$

$t=\frac{5}{2}$ を点 Q の y 座標 t^2-t に代入して　$\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{2}=\frac{15}{4}$

したがって，点 Q の座標は　$\left(\frac{5}{2},\ \frac{15}{4}\right)$

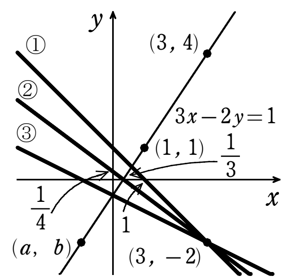
10. 異なる 3 直線

$$x+y=1 \ \cdots\cdots ①,\ 3x+4y=1 \ \cdots\cdots ②,\ ax+by=1 \ \cdots\cdots ③$$

が 1 点で交わるとき，3 点 $(1,\ 1)$，$(3,\ 4)$，$(a,\ b)$ は一直線上にあることを示せ。

解答　略

解説



①，② を連立して解くと　$x=3$，$y=-2$

2 直線 ①，② の交点の座標は　$(3,\ -2)$

点 $(3,\ -2)$ は直線 ③ 上にあるから

$$3a-2b=1 \quad \cdots\cdots [A]$$

また，2 点 $(1,\ 1)$，$(3,\ 4)$ を通る直線の方程式は

$$y-1=\frac{4-1}{3-1}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad 3x-2y=1$$

[A] から，点 $(a,\ b)$ は，直線 $3x-2y=1$ 上にある。

よって，3 点 $(1,\ 1)$，$(3,\ 4)$，$(a,\ b)$ は直線 $3x-2y=1$ 上にある。

別解　原点を通らない 3 直線 ①，②，③ が 1 点で交わるから，その点を P $(p,\ q)$ とすると，P は原点にはならない。

3 直線 ①，②，③ が，点 P を通ることから

$$p+q=1,\ 3p+4q=1,\ ap+bq=1$$

つまり　$p\cdot 1+q\cdot 1=1$　……④

$p\cdot 3+q\cdot 4=1$　……⑤

$p\cdot a+q\cdot b=1$　……⑥

であり　$p \fallingdotseq 0$ または $q \fallingdotseq 0$

ゆえに，方程式 $px+qy=1$ ……⑦ を考えると，④ ～ ⑥ から，3 点 $(1,\ 1)$，$(3,\ 4)$，$(a,\ b)$ は直線 ⑦ 上にある。