数学演習（図形と方程式２）Ｈ２１．１１．８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１. (1)　2 点 $(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(2)　3 点 $(3,\ 1)$，$(6,\ -8)$，$(-2,\ -4)$ を通る円の方程式を求めよ。

２. 直線 $y=-4x+5$ 上に中心があり，x 軸と y 軸の両方に接する円の方程式を求めよ。

３. 円 $x^2+2x+y^2=1$ …… ① と直線 $y=mx-m$ …… ② が異なる 2 点で交わるような，定数 m の値の範囲を求めよ。

４. 円 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ 上の点 $\mathrm{P}(4,\ 6)$ における，この円の接線の方程式を求めよ。

５. (1) 点 $(3,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=2$ に接する直線の方程式と，そのときの接点の座標を求めよ。

(2) 点 $(1,\ 3)$ から円 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$ に引いた接線の方程式を求めよ。

6. 円 $x^2+y^2=16$ が直線 $y=x+2$ から切り取る線分の長さを求めよ。

7. 円 $C: x^2+y^2-2x-4y+4=0$ と直線 $\ell: y=mx+1$ について，ℓ が C によって切り取られる線分の長さが $\sqrt{2}$ であるとき，定数 m の値を求めよ。

8. xy 平面上の点 $(5,\ 6)$ と円 $x^2+y^2+2x+4y-20=0$ 上の点との最短距離を求めよ。

9. 2 円 $x^2+y^2=5$，$(x-1)^2+(y-2)^2=4$ について，2 円は異なる 2 点で交わる。

(1) 2 円の交点を通る直線の方程式を求めよ。

(2) 2 円の交点と点 $(1,\ 3)$ を通る円の方程式を求めよ。

10. 2 円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ …… ①，$x^2+y^2-8x-4y+15=0$ …… ② が共有点をもつような r の値の範囲を求めよ。

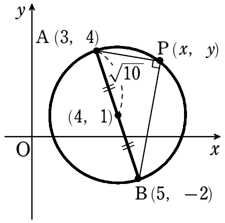
11. 円 $x^2+y^2=1$ 上に動点 P がある。2 点 A$(3, 0)$, B$(0, -2)$ について△PAB の面積の最大値を求めよ。

数学演習（図形と方程式２）Ｈ２１．１１．８　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．(1)　2 点 $(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。
(2)　3 点 $(3,\ 1)$，$(6,\ -8)$，$(-2,\ -4)$ を通る円の方程式を求めよ。

解答　(1)　$(x-4)^2+(y-1)^2=10$　　(2)　$x^2+y^2-6x+8y=0$

(1)　この円の中心は，2 点 $(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$ を結ぶ線分の中点であるから，その座標は　$(4,\ 1)$
半径 r は中心 $(4,\ 1)$ と円上の点 $(3,\ 4)$ との距離であるから　$r^2=(4-3)^2+(1-4)^2=10$
よって，求める円の方程式は
$(x-4)^2+(y-1)^2=10$

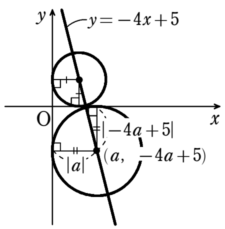


(2)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。
点 $(3,\ 1)$ を通るから　$3^2+1^2+3l+m+n=0$
点 $(6,\ -8)$ を通るから　$6^2+(-8)^2+6l-8m+n=0$
点 $(-2,\ -4)$ を通るから　$(-2)^2+(-4)^2-2l-4m+n=0$
整理すると　$3l+m+n+10=0$
$6l-8m+n+100=0$
$2l+4m-n-20=0$
これを解いて　$l=-6,\ m=8,\ n=0$
よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-6x+8y=0$

２．直線 $y=-4x+5$ 上に中心があり，x 軸と y 軸の両方に接する円の方程式を求めよ。

解答　$(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$

円の中心が直線 $y=-4x+5$ 上にあるから，中心の座標は $(a,\ -4a+5)$ と表される。
また，円が x 軸と y 軸に接するから，円の半径を r とすると　$|a|=|-4a+5|=r$
$|a|=|-4a+5|$ から　$a=\pm(-4a+5)$
$a=-4a+5$ のとき　$a=1$
よって，中心は $(1,\ 1)$，$r=1$
$a=-(-4a+5)$ のとき　$a=\frac{5}{3}$
よって，中心は $\left(\frac{5}{3},\ -\frac{5}{3}\right)$，$r=\frac{5}{3}$



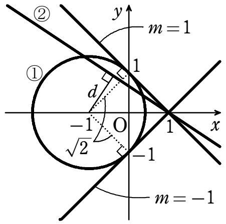
したがって，求める円の方程式は
$$(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$$

３．円 $x^2+2x+y^2=1$ ……① と直線 $y=mx-m$ ……② が異なる 2 点で交わるような，定数 m の値の範囲を求めよ。

解答　$-1<m<1$

[解法 1]　② を ①に代入して整理すると　$(m^2+1)x^2-2(m^2-1)x+m^2-1=0$
判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=\{-(m^2-1)\}^2-(m^2+1)(m^2-1)$
$=-2m^2+2=-2(m+1)(m-1)$
円 ① と直線 ② が異なる 2 点で交わるための条件は　$D>0$
よって　$-2(m+1)(m-1)>0$　　ゆえに　$-1<m<1$

[解法 2]　① を変形すると　$(x+1)^2+y^2=(\sqrt{2})^2$
よって，円 ① の中心は $(-1,\ 0)$，半径は $\sqrt{2}$ である。
円 ① の中心と直線 ② の距離を d とすると，異なる 2 点で交わるための条件は　$d<\sqrt{2}$
$d=\frac{|m\cdot(-1)-0-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$ であるから
$\frac{2|m|}{\sqrt{m^2+1}}<\sqrt{2}$

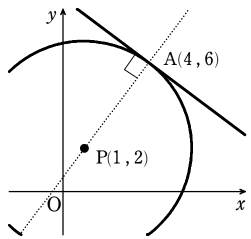


両辺に正の数 $\sqrt{m^2+1}$ を掛けて　$2|m|<\sqrt{2(m^2+1)}$
両辺は負でないから，2 乗して　$4m^2<2(m^2+1)$
よって　$(m+1)(m-1)<0$　　ゆえに　$-1<m<1$

４．円 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ 上の点 P$(4,\ 6)$ における，この円の接線の方程式を求めよ。

解答　$3x+4y-36=0$

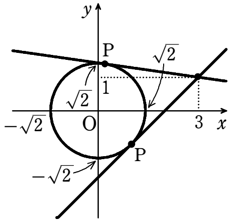
$x^2+y^2-2x-4y-20=0$ を変形すると
$(x-1)^2+(y-2)^2=25$
円 ① の中心をA$(1,\ 2)$ とすると，
円 ① 上の点P$(4,\ 6)$ における接線は
直線APに垂直になる。
直線APの傾きは $\frac{6-2}{4-1}=\frac{4}{3}$ より
接線の傾きを m とすると
$m\times\frac{4}{3}=-1$　より　$m=-\frac{3}{4}$
ゆえに　$y-6=-\frac{3}{4}(x-4)$
整理すると　$3x+4y-36=0$



５．(1) 点 $(3,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=2$ に接する直線の方程式と，そのときの接点の座標を求めよ。
(2) 点 $(1,\ 3)$ から円 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$ に引いた接線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$x+7y=10$，$\left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right)$；$x-y=2$，$(1,\ -1)$　(2)　$x=1$，$y=-\frac{15}{8}x+\frac{39}{8}$

(1) 接点を P$(x_1,\ y_1)$ とすると
$x_1{}^2+y_1{}^2=2$　……①
また，点 P におけるこの円の接線の方程式は
$x_1x+y_1y=2$
この直線が点 $(3,\ 1)$ を通るから
$3x_1+y_1=2$　……②
①，② から y_1 を消去して整理すると
$5x_1{}^2-6x_1+1=0$
よって　$(5x_1-1)(x_1-1)=0$　　ゆえに　$x_1=\frac{1}{5},\ 1$



② に代入して　$x_1=\frac{1}{5}$ のとき　$y_1=\frac{7}{5}$，　$x_1=1$ のとき　$y_1=-1$
したがって，求める接線の方程式と接点の座標は
$x+7y=10$，$\left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right)$；$x-y=2$，$(1,\ -1)$

別解 1　点 $(3,\ 1)$ を通る接線は，x 軸に垂直でないから，求める接線の方程式は，傾きを m とすると次のようにおける。
$y-1=m(x-3)$　すなわち　$y=mx-(3m-1)$　……③
③ を円の方程式に代入して整理すると
$(m^2+1)x^2-2m(3m-1)x+9m^2-6m-1=0$　……④
$m^2+1\fallingdotseq 0$ であるから，2 次方程式 ④ の判別式を D とすると
$\frac{D}{4}=\{-m(3m-1)\}^2-(m^2+1)(9m^2-6m-1)$
$=-7m^2+6m+1=-(7m+1)(m-1)$
円と直線 ③ が接するための条件は　$D=0$
よって　$-(7m+1)(m-1)=0$　　ゆえに　$m=-\frac{1}{7},\ 1$
$m=-\frac{1}{7}$ のとき，④ の重解は　$x=\frac{m(3m-1)}{m^2+1}=\frac{1}{5}$
$m=1$　のとき，④ の重解は　$x=1$
したがって，求める接線の方程式と接点の座標は
$y=-\frac{1}{7}x+\frac{10}{7}$，$\left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right)$；$y=x-2$，$(1,\ -1)$

別解 2　（別解 1 と 3 行目まで同じ）
③ から　$mx-y-3m+1=0$　……⑤
円の中心 $(0,\ 0)$ と接線の距離が円の半径 $\sqrt{2}$ に等しいから
$\frac{|m\cdot 0-0-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$
両辺に $\sqrt{m^2+1}$ を掛けて　$|-3m+1|=\sqrt{2(m^2+1)}$
両辺を 2 乗して整理すると　$7m^2-6m-1=0$
よって　$(7m+1)(m-1)=0$　　ゆえに　$m=-\frac{1}{7},\ 1$
$m=-\frac{1}{7}$ のとき，⑤ は　$x+7y-10=0$　……⑥
直線 OP は $y=7x$ と表されるから，⑥ と連立させて解くと，接点の座標は
$\left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right)$
$m=1$ のとき，⑤ は　$x-y-2=0$　……⑦
直線 OP は $y=-x$ と表されるから，⑦ と連立させて解くと，接点の座標は
$(1,\ -1)$

(2)点 $(1,\ 3)$ を通る直線のうち，直線 $x=1$ は求める円の接線である。

他の接線の方程式は，傾きを m とすると次のように表される。

$$y-3=m(x-1) \quad \text{すなわち} \quad mx-y-(m-3)=0$$

円の中心 $(2,\ -1)$ と接線の距離が半径 1 に等しいから

$$\frac{|2m+1-(m-3)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{|m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

よって　$|m+4|=\sqrt{m^2+1}$

両辺は負でないから，2 乗して　$(m+4)^2=m^2+1$

これを解いて　$m=-\dfrac{15}{8}$

ゆえに，求める接線の方程式は　$x=1,\ y=-\dfrac{15}{8}x+\dfrac{39}{8}$

6. 円 $x^2+y^2=16$ が直線 $y=x+2$ から切り取る線分の長さを求めよ。

解答　$2\sqrt{14}$

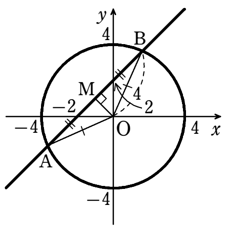
円と直線の交点を A，B とし，線分 AB の中点を M とする。

線分 OM の長さは，円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $y=x+2$ の距離に等しいから

$$\mathrm{OM}=\frac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

円の半径は 4 であるから

$$\mathrm{AB}=2\mathrm{AM}=2\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OM}^2}$$
$$=2\sqrt{4^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{14}$$



別解　直線の方程式を円の方程式に代入して整理すると

$$x^2+2x-6=0 \quad \cdots\cdots ①$$

① の実数解を α，β とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-6$$

円と直線の交点の座標は $(\alpha,\ \alpha+2)$，$(\beta,\ \beta+2)$ であるから，求める線分の長さは

$$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+2)-(\alpha+2)\}^2}=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}$$
$$=\sqrt{2\{(-2)^2-4\cdot(-6)\}}=2\sqrt{14}$$

7. 円 $C:x^2+y^2-2x-4y+4=0$ と直線 $\ell:y=mx+1$ について，ℓ が C によって切り取られる線分の長さが $\sqrt{2}$ であるとき，定数 m の値を求めよ。

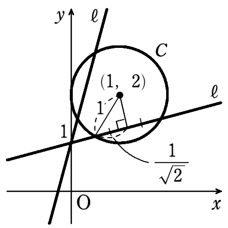
解答　$m=2\pm\sqrt{3}$

円の中心 $(1,\ 2)$ と直線 $y=mx+1$ すなわち $mx-y+1=0$ の距離は

$$\frac{|m\cdot1-2+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

円 C の半径が 1，直線 ℓ が円 C によって切り取られる線分の長さが $\sqrt{2}$ であるから，円 C の中心と直線 ℓ の距離は

$$\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



したがって　$\dfrac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

両辺に $\sqrt{2(m^2+1)}$ を掛けて　$\sqrt{2}|m-1|=\sqrt{m^2+1}$

両辺は負でないから，2 乗して　$2(m-1)^2=m^2+1$

よって　$m^2-4m+1=0$　　ゆえに　$m=2\pm\sqrt{3}$

別解　$y=mx+1$ を円の方程式に代入して整理すると

$$(m^2+1)x^2-2(m+1)x+1=0 \quad \cdots\cdots ①$$

円と直線の交点の座標を $(\alpha,\ m\alpha+1)$，$(\beta,\ m\beta+1)$ とすると，α，β は 2 次方程式 ① の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{2(m+1)}{m^2+1},\ \alpha\beta=\frac{1}{m^2+1} \quad \cdots\cdots ②$$

求める条件は　$(\beta-\alpha)^2+\{(m\beta+1)-(m\alpha+1)\}^2=(\sqrt{2})^2$

$$(\text{左辺})=(\beta-\alpha)^2+m^2(\beta-\alpha)^2=(m^2+1)(\beta-\alpha)^2$$
$$=(m^2+1)\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$$

② を代入して　$(m^2+1)\left\{\dfrac{4(m+1)^2}{(m^2+1)^2}-\dfrac{4}{m^2+1}\right\}=2$

よって　$m^2-4m+1=0$　　ゆえに　$m=2\pm\sqrt{3}$

8. xy 平面上の点 $(5,\ 6)$ と円 $x^2+y^2+2x+4y-20=0$ 上の点との最短距離を求めよ。

解答　5

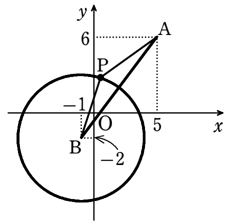
円の方程式を変形すると　$(x+1)^2+(y+2)^2=5^2$

よって，円の中心は $(-1,\ -2)$，半径は 5 である。

点 $(5,\ 6)$ を A，円の中心を B，円上の点を P とすると，右の図のように，P が線分 AB 上にあるとき最短となる。ここで　BP$=5$（半径）

また　$\mathrm{AB}=\sqrt{(5+1)^2+(6+2)^2}=10$

ゆえに最短距離は $10-5=5$ である。



9. 2 円 $x^2+y^2=5$，$(x-1)^2+(y-2)^2=4$ について，2 円は異なる 2 点で交わる。

(1)　2 円の交点を通る直線の方程式を求めよ。

(2)　2 円の交点と点 $(1,\ 3)$ を通る円の方程式を求めよ。

解答　(1)　$x+2y-3=0$　　(2)　$4x^2+4y^2-5x-10y-5=0$

与えられた円を順に ①，② とする。

(1) $k(x^2+y^2-5)+(x-1)^2+(y-2)^2-4=0$（$k$ は定数）……③ とすると，③ は 2 円 ①，② の交点を通る円，または直線を表す。

③ に $k=-1$ を代入すると

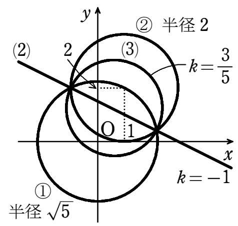
$$-(x^2+y^2-5)+(x-1)^2+(y-2)^2-4=0$$

整理すると　$x+2y-3=0$

これは直線を表すから，求める方程式である。

(2)　③ が点 $(1,\ 3)$ を通るとして，③ に $x=1$，$y=3$ を代入して整理すると

$$5k-3=0 \qquad \text{よって} \qquad k=\frac{3}{5}$$



これを ③ に代入して整理すると

$$4x^2+4y^2-5x-10y-5=0$$

これは円を表すから，求める方程式である。

10. 2 円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ ……①，$x^2+y^2-8x-4y+15=0$ ……② が共有点をもつような r の値の範囲を求めよ。

解答　$\sqrt{5}\leqq r\leqq 3\sqrt{5}$

円 ① は　中心 $(0,\ 0)$，半径 r，

円 ② は　$(x-4)^2+(y-2)^2=5$ であり，中心 $(4,\ 2)$，半径 $\sqrt{5}$ である。

2 円の中心間の距離は

$$\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

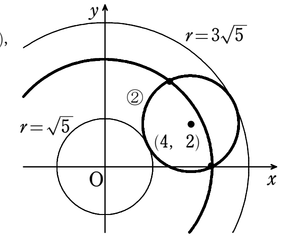
2 円 ①，② が外接するときは

$$2\sqrt{5}=r+\sqrt{5} \quad \text{より} \quad r=\sqrt{5}$$

2 円 ①，② が内接するときは

$$r=2\sqrt{5}+\sqrt{5} \quad \text{より} \quad r=3\sqrt{5}$$

よって求める r の範囲は　$\sqrt{5}\leqq r\leqq 3\sqrt{5}$

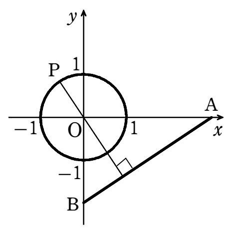


11. 円 $x^2+y^2=1$ 上に動点 P がある。 2 点 A$(3,0)$，B$(0,-2)$ について△PAB の面積の最大値を求めよ。

解答　$\dfrac{6+\sqrt{13}}{2}$

円の中心を O とする。与えられた円と直線は共有点をもたない。線分 AB の長さは一定であるので点 P から直線 AB に下ろした垂線の長さが最大となるとき，△PAB の面積は最大となる。円の中心を通り線分 AB に垂直な直線と円との交点のうち，線分 AB から遠い方が求める点 P である。

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(3-0)^2+(0+2)^2}=\sqrt{13}$$



であり，OP$=1$ である。 線分 AB を底辺としたとき高さは

OP の長さ＋点 O と直線 AB との距離

なので，直線 AB の方程式は $y=\dfrac{2}{3}x-2$　つまり　$2x-3y-6=0$ より

$$\text{点 O と直線 AB との距離}=\frac{|2\cdot0-3\cdot0-6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$$

したがって面積が最大となるときの△PAB の高さは $1+\dfrac{6}{\sqrt{13}}$ より

△PAB の面積の最大値は

$$\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{6}{\sqrt{13}}\right)\cdot AB=\frac{1}{2}\left(1+\frac{6}{\sqrt{13}}\right)\sqrt{13}=\frac{6+\sqrt{13}}{2}$$