数学演習（図形と方程式）Ｈ２１．１０．１４　　(　)組(　)番　名前(　)

１. 2 点 A $(-1,\ 2)$, B $(3,\ 4)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めよ。

２. A $(-2,\ 1)$, B $(6,\ -3)$, C $(1,\ 7)$ とするとき，次の点の座標を求めよ。

(1) 線分 BC を 3 : 2 に内分する点 P

(2) 線分 CA を 3 : 2 に外分する点 Q

(3) 線分 AB の中点 R

(4) △PQR の重心 G

３. 次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(1,\ -3)$ を通り，直線 $6x+3y-5=0$ に平行な直線

(2) 2 点 A $(0,\ 6)$, B $(4,\ 4)$ を結ぶ線分の垂直二等分線

４. 直線 $2x+y+1=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点P $(-3,\ 1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

５. 次の点と直線の距離を求めよ。　点 $(2,\ -3)$，直線 $4x-3y=2$

６. 3 点 $(1,\ 3)$, $(4,\ 2)$, $(5,\ -5)$ を通る円の方程式を求めよ。

7. 次のような円の方程式を求めよ。

(1)　中心が点 $(3,\ 4)$ で，原点を通る円

(2)　2 点 $(3,\ 1)$，$(-5,\ 7)$ を直径の両端とする円

8. 円 $x^2+y^2=2$　…… ① と直線 $y=-x+k$　…… ② について

(1)　円 ① と直線 ② が共有点をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　円 ① と直線 ② が接するとき，定数 k の値を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

9. 点 A $(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=2$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

10. 円 $x^2+y^2=5$ が直線 $y=x+2$ から切り取る線分の長さを求めよ。

11. 円 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ 上の点 $(4,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ。

12. 2 円 $x^2+y^2-4=0$　…… ①，$x^2+y^2-4x-2y+1=0$　…… ② の 2 つの交点を A，B とするとき，次の直線，円の方程式を求めよ。

(1)　直線 AB

(2)　交点 A，B と原点 O を通る円

１．2 点 A$(-1,\ 2)$，B$(3,\ 4)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めよ。

解答　$\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$

点 P は x 軸上にあるから，その座標を $(x,\ 0)$ とおく。

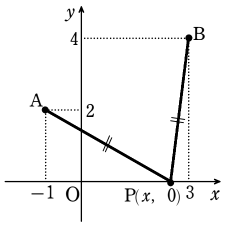
AP＝BP　すなわち　$AP^2=BP^2$　から

$\{x-(-1)\}^2+(0-2)^2=(x-3)^2+(0-4)^2$

ゆえに　$(x+1)^2+4=(x-3)^2+16$

整理して　$8x=20$　　よって　$x=\dfrac{5}{2}$

したがって，点 P の座標は　$\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$



２．A$(-2,\ 1)$，B$(6,\ -3)$，C$(1,\ 7)$ とするとき，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 BC を 3 : 2 に内分する点 P

(2)　線分 CA を 3 : 2 に外分する点 Q

(3)　線分 AB の中点 R

(4)　△PQR の重心 G

解答　(1)　$(3,\ 3)$　　(2)　$(-8,\ -11)$　　(3)　$(2,\ -1)$　　(4)　$(-1,\ -3)$

(1)　点 P の座標は，$\left(\dfrac{2\cdot6+3\cdot1}{3+2},\ \dfrac{2\cdot(-3)+3\cdot7}{3+2}\right)$ から　$(3,\ 3)$

(2)　点 Q の座標は，$\left(\dfrac{-2\cdot1+3\cdot(-2)}{3-2},\ \dfrac{-2\cdot7+3\cdot1}{3-2}\right)$ から　$(-8,\ -11)$

(3)　点 R の座標は，$\left(\dfrac{-2+6}{2},\ \dfrac{1-3}{2}\right)$ から　$(2,\ -1)$

(4)　(1)～(3) の結果により，△PQR の重心 G の座標は

$\left(\dfrac{3-8+2}{3},\ \dfrac{3-11-1}{3}\right)$ から　$(-1,\ -3)$

３．次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(1,\ -3)$ を通り，直線 $6x+3y-5=0$ に平行な直線

(2)　2 点 A$(0,\ 6)$，B$(4,\ 4)$ を結ぶ線分の垂直二等分線

解答　(1)　$2x+y+1=0$　　(2)　$2x-y+1=0$

(1)　直線 $6x+3y-5=0$ の傾きは　-2

よって，この直線に平行な直線の傾きは -2 である。

したがって，求める直線の方程式は

$y-(-3)=-2(x-1)$　すなわち　$2x+y+1=0$

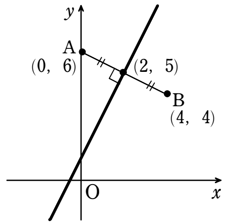
(2)　線分 AB の中点の座標は

$\left(\dfrac{0+4}{2},\ \dfrac{6+4}{2}\right)$ から　$(2,\ 5)$

直線 AB の傾きは　$\dfrac{4-6}{4-0}=-\dfrac{1}{2}$

よって，線分 AB の垂直二等分線の傾きは 2 であるから，求める直線の方程式は

$y-5=2(x-2)$　すなわち　$2x-y+1=0$



別解　(1)　求める直線の方程式は

$6(x-1)+3(y+3)=0$　すなわち　$2x+y+1=0$

(2)　2 点 A，B を通る直線の方程式は

$y-6=\dfrac{4-6}{4-0}(x-0)$　すなわち　$y-6=-\dfrac{1}{2}x$

よって　$x+2y-12=0$　また，線分 AB の中点の座標は $(2,\ 5)$

ゆえに，求める直線の方程式は　$2(x-2)-(y-5)=0$　すなわち　$2x-y+1=0$

４．直線 $2x+y+1=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点P$(-3,\ 1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

解答　$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

点 Q の座標を $(p,\ q)$ とする。

[1]　直線 ℓ の傾きは　-2

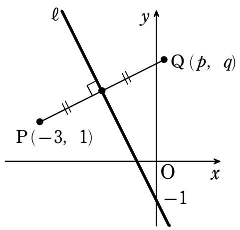
直線 PQ の傾きは　$\dfrac{q-1}{p+3}$

PQ ⊥ ℓ であるから

$\dfrac{q-1}{p+3}\cdot(-2)=-1$

ゆえに　$2(q-1)=p+3$

よって　$p-2q+5=0$　……①



[2]　線分 PQ の中点 $\left(\dfrac{-3+p}{2},\ \dfrac{1+q}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

$2\cdot\dfrac{-3+p}{2}+\dfrac{1+q}{2}+1=0$

ゆえに　$2(-3+p)+1+q+2=0$

よって　$2p+q-3=0$　……②

①＋②×2 から　$5p-1=0$　　ゆえに　$p=\dfrac{1}{5}$

これを ② に代入して　$2\cdot\dfrac{1}{5}+q-3=0$　　よって　$q=\dfrac{13}{5}$

したがって，求める点 Q の座標は　$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

５．次の点と直線の距離を求めよ。　点 $(2,\ -3)$，直線 $4x-3y=2$

解答　3

$4x-3y=2$ から　$4x-3y-2=0$

したがって，求める距離は　$\dfrac{|4\cdot2-3\cdot(-3)-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|15|}{\sqrt{25}}=\dfrac{15}{5}=3$

６．3 点 $(1,\ 3)$，$(4,\ 2)$，$(5,\ -5)$ を通る円の方程式を求めよ。

解答　$x^2+y^2-2x+4y-20=0$

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。

3 点 $(1,\ 3)$，$(4,\ 2)$，$(5,\ -5)$ を通るから

$l+3m+n+10=0$　……①

$4l+2m+n+20=0$　……②

$5l-5m+n+50=0$　……③

②−① から　$3l-m+10=0$　……④

③−② から　$l-7m+30=0$　……⑤

④×7−⑤ から　$20l+40=0$　　よって　$l=-2$

④ から　$m=4$　　① から　$n=-20$

よって　$x^2+y^2-2x+4y-20=0$

別解　A$(1,\ 3)$，B$(4,\ 2)$，C$(5,\ -5)$ とする。

弦 AB の中点の座標は　$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$，

直線 AB の傾きは　$-\dfrac{1}{3}$

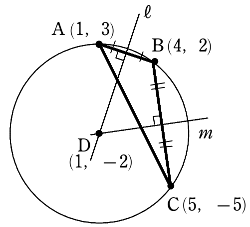
よって，弦 AB の垂直二等分線 ℓ の方程式は

$y-\dfrac{5}{2}=3\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$

すなわち　$3x-y-5=0$　……①

同様にして，弦 BC の垂直二等分線 m の方程式は

$x-7y-15=0$　……②



①，② を連立して解くと　$x=1,\ y=-2$

ゆえに，円の中心は点 D$(1,\ -2)$ で，半径は　$DA=\sqrt{(1-1)^2+(3+2)^2}=5$

したがって，求める円の方程式は　$(x-1)^2+(y+2)^2=25$

7．次のような円の方程式を求めよ。

(1)　中心が点 $(3,\ 4)$ で，原点を通る円

(2)　2 点 $(3,\ 1)$，$(-5,\ 7)$ を直径の両端とする円

解答　(1)　$(x-3)^2+(y-4)^2=25$　　(2)　$(x+1)^2+(y-4)^2=25$

(1)　この円の半径 r は，中心 $(3,\ 4)$ と原点の距離で

$$r=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

よって，求める円の方程式は

$$(x-3)^2+(y-4)^2=25$$

(2)　この円の中心は 2 点 $(3,\ 1)$，$(-5,\ 7)$ を結ぶ線分の中点で

$$\left(\frac{3-5}{2},\ \frac{1+7}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad (-1,\ 4)$$

半径 r は中心 $(-1,\ 4)$ と点 $(3,\ 1)$ との距離で

$$r=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(1-4)^2}=5$$

よって，求める円の方程式は

$$\{x-(-1)\}^2+(y-4)^2=25$$

すなわち　$(x+1)^2+(y-4)^2=25$

8．円 $x^2+y^2=2$　……①と直線 $y=-x+k$　……②について

(1)　円①と直線②が共有点をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　円①と直線②が接するとき，定数 k の値を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

解答　(1)　$-2\leqq k\leqq 2$

(2)　$k=2$ のとき，接点の座標は　$(1,\ 1)$；

$k=-2$ のとき，接点の座標は　$(-1,\ -1)$

②を①に代入して　$x^2+(-x+k)^2=2$

整理すると　$2x^2-2kx+k^2-2=0$　……[A]

判別式は　$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-2)=-(k^2-4)=-(k+2)(k-2)$

(1)　円①と直線②が共有点をもつための条件は　$D\geqq 0$

よって　$-2\leqq k\leqq 2$

(2)　円①と直線②が接するための条件は　$D=0$

したがって　$k=\pm 2$

このとき，[A] は重解 $x=-\dfrac{-2k}{2\cdot 2}=\dfrac{k}{2}$ をもつ。

$x=\dfrac{k}{2}$ のとき，②から　$y=-\dfrac{k}{2}+k=\dfrac{k}{2}$

よって　$k=2$　のとき，接点の座標は　$(1,\ 1)$

$k=-2$ のとき，接点の座標は　$(-1,\ -1)$

9．点 $\mathrm{A}\,(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=2$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

解答　接線の方程式 $x-y=2$，　接点の座標 $(1,\ -1)$；

接線の方程式 $x+7y=10$，接点の座標 $\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$

接点を $\mathrm{P}\,(a,\ b)$ とすると，P は円上にあるから

$a^2+b^2=2$　……①

また，P における接線の方程式は

$ax+by=2$　……②

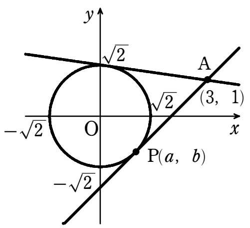
で，この直線が点 A を通るから

$3a+b=2$　……③

①と③から b を消去して　$a^2+(2-3a)^2=2$

整理すると　$5a^2-6a+1=0$

ゆえに　$(a-1)(5a-1)=0$



よって　$a=1,\ \dfrac{1}{5}$

③から　$a=1$ のとき　$b=-1$，$a=\dfrac{1}{5}$ のとき　$b=\dfrac{7}{5}$

したがって，接線の方程式②と接点の座標は次のようになる。

接線の方程式 $x-y=2$，　接点の座標 $(1,\ -1)$

接線の方程式 $x+7y=10$，接点の座標 $\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$

別解　点 $(3,\ 1)$ を通る接線は，x 軸に垂直でないから，求める接線の方程式は，次のようにおける。

$y-1=m(x-3)$　すなわち　$y=mx-(3m-1)$　……①

①を円の方程式に代入して　$x^2+\{mx-(3m-1)\}^2=2$

展開して整理すると

$(m^2+1)x^2-2m(3m-1)x+(3m-1)^2-2=0$　……②

判別式は　$\dfrac{D}{4}=\{-m(3m-1)\}^2-(m^2+1)\{(3m-1)^2-2\}$

$=(3m-1)^2\{m^2-(m^2+1)\}+2(m^2+1)$

$=-(3m-1)^2+2(m^2+1)$

$=-7m^2+6m+1=-(7m^2-6m-1)$

$=-(m-1)(7m+1)$

円と直線①が接するための条件は　$D=0$

ゆえに　$(m-1)(7m+1)=0$　　よって　$m=1,\ -\dfrac{1}{7}$

求めた m の値を①に代入すると

$m=1$　のとき　$y=x-2$　……③

$m=-\dfrac{1}{7}$ のとき　$y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{10}{7}$　……④

また，2 次方程式②の重解は　$x=-\dfrac{-2m(3m-1)}{2(m^2+1)}=\dfrac{m(3m-1)}{m^2+1}$

$m=1$　を代入して　$x=\dfrac{1\cdot(3\cdot 1-1)}{1^2+1}=1$

$m=-\dfrac{1}{7}$ を代入して　$x=\dfrac{-\frac{1}{7}\left\{3\left(-\frac{1}{7}\right)-1\right\}}{\left(-\frac{1}{7}\right)^2+1}=\dfrac{1}{5}$

接点の y 座標は，$x=1$ を③に代入して　$y=-1$

$x=\dfrac{1}{5}$ を④に代入して　$y=\dfrac{7}{5}$

以上から，接線の方程式と接点の座標は，次のようになる。

接線：$x-y=2$，　接点の座標　$(1,\ -1)$

接線：$x+7y=10$，接点の座標　$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$

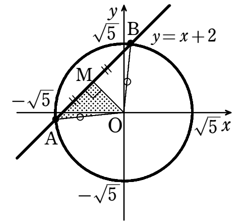
10．円 $x^2+y^2=5$ が直線 $y=x+2$ から切り取る線分の長さを求めよ。

解答　$2\sqrt{3}$

円と直線の交点を A，B とし，線分 AB の中点を M とする。

線分 OM の長さは，円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $y=x+2$，すなわち $x-y+2=0$ の距離に等しいから

$$\mathrm{OM}=\frac{|0-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$



$\triangle\mathrm{OAB}$ は，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\sqrt{5}$ (半径) の二等辺三角形で，三平方の定理から

$\mathrm{AB}=2\mathrm{AM}=2\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OM}^2}$

$=2\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$

別解　$x^2+y^2=5$，$y=x+2$ から y を消去して　$x^2+(x+2)^2=5$

展開して整理すると　$2x^2+4x-1=0$　……①

円と直線の交点の座標を $(\alpha,\ \alpha+2)$，$(\beta,\ \beta+2)$ とすると，α，β は 2 次方程式①の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

求める線分の長さを l とすると

$l^2=(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+2)-(\alpha+2)\}^2=2(\beta-\alpha)^2$

$=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=2\left\{(-2)^2-4\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}=12$

したがって，求める線分の長さは　$l=2\sqrt{3}$

11．円 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ 上の点 $(4,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$y=-\dfrac{3}{4}x+5$

円の中心の座標は　$(1,\ -2)$

2 点 $(1,\ -2)$，$(4,\ 2)$ を通る直線の傾きは

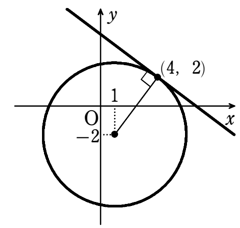
$$\frac{2-(-2)}{4-1}=\frac{4}{3}$$

接線の傾きを m とすると

$m\cdot\dfrac{4}{3}=-1$ から　$m=-\dfrac{3}{4}$

したがって，求める接線の方程式は

$y-2=-\dfrac{3}{4}(x-4)$　すなわち　$y=-\dfrac{3}{4}x+5$



12．2 円 $x^2+y^2-4=0$　……①，$x^2+y^2-4x-2y+1=0$　……②の 2 つの交点を A，B とするとき，次の直線，円の方程式を求めよ。

(1)　直線 AB　　(2)　交点 A，B と原点 O を通る円

解答　(1)　$4x+2y-5=0$　　(2)　$\left(x-\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{16}{5}$

k を定数として，次の方程式を考える。

$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-4x-2y+1)=0$　……③

このとき，方程式③は，2 つの円①，②の交点を通る図形を表す。

(1)　③で $k=-1$ とすると

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-4x-2y+1)=0$

よって　$4x+2y-5=0$

これは直線を表すから，直線 AB の方程式である。

(2)　図形③が原点を通るとして，③に $x=0$，$y=0$ を代入すると　$-4+k=0$

よって　$k=4$

③に代入して整理・変形すると　$\left(x-\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{16}{5}$

これは円を表すから，求める方程式である。