数学演習（図形と方程式）Ｈ２３．３．２２

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．　2 点 A$(-1,\ -4)$，B$(3,\ -2)$ から等距離にある y 軸上の点 P の座標を求めよ。

２．3 点 A$(5,\ 4)$，B$(0,\ -1)$，C$(8,\ -2)$ がある。

(1)　線分 AB を 3 : 2 に内分する点を P，3 : 2 に外分する点を Q とするとき，線分 PQ を 2 : 3 に内分する点 R の座標を求めよ。

(2)　△ABC の重心 G の座標を求めよ。

３．(1) 点 $(-3,\ 2)$ を通り，直線 $3x-4y-6=0$ に平行な直線 ℓ と垂直な直線 ℓ' の方程式をそれぞれ求めよ。

(2)　2 点 A$(2,\ 5)$，B$(-4,\ 3)$ を結ぶ線分の垂直二等分線

４．直線 $3x+2y-6=0$ について，点 $(3,\ 1)$ と対称な点の座標を求めよ。

５．3 点 A$(3,\ 5)$，B$(5,\ 2)$，C$(1,\ 1)$ について，次のものを求めよ。

(1)　直線 BC の方程式　　(2)　線分 BC の長さ

(3)　点 A と直線 BC の距離　　(4)　△ABC の面積

６．直線 $y=2x+k$ と円 $x^2+y^2=1$ が共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲を求めよ。また，接するときの k の値と接点の座標を求めよ。

７．(1)　2 点 $(-3,\ 6)$，$(3,\ -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(2)　3 点 A$(-2,\ 6)$，B$(1,\ -3)$，C$(5,\ -1)$ を頂点とする △ABC の外接円の中心と半径を求めよ。

８. 円 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ 上の点 P$(4,\ 6)$ における接線の方程式を求めよ。

９. 点 $(7,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式と，そのときの接点の座標を求めよ。

10. 点 $(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2-2x+6y=0$ に引いた接線の方程式を求めよ。

11. ２円 $x^2+y^2-4x-2y-8=0$，$x^2+y^2=4$ の２つの交点と原点 を通る円の中心の座標と半径を求めよ。

12. 円 C : $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ と直線 ℓ : $y=mx+1$ について，ℓ が C によって切り取られる線分の長さが $\sqrt{2}$ であるとき，定数 m の値を求めよ。

数学演習（図形と方程式）Ｈ２３．３．２２　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．2点 A$(-1,\ -4)$，B$(3,\ -2)$ から等距離にある y 軸上の点 P の座標を求めよ。

解答　$(0,\ -1)$

点 P の座標を P$(0,\ y)$ とする。

PA$=$PB すなわち PA$^2=$PB^2 から

$$(-1-0)^2+(-4-y)^2=(3-0)^2+(-2-y)^2$$

整理すると　$4y=-4$　　よって　$y=-1$

ゆえに，点 P の座標は　$(0,\ -1)$

2．3点 A$(5,\ 4)$，B$(0,\ -1)$，C$(8,\ -2)$ がある。

(1)　線分 AB を $3:2$ に内分する点を P，$3:2$ に外分する点を Q とするとき，線分 PQ を $2:3$ に内分する点 R の座標を求めよ。

(2)　△ABC の重心 G の座標を求めよ。

解答　(1)　$\left(-\dfrac{14}{5},\ -\dfrac{19}{5}\right)$　(2)　$\left(\dfrac{13}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

(1)　P の座標は $\left(\dfrac{2\cdot5+3\cdot0}{3+2},\ \dfrac{2\cdot4+3\cdot(-1)}{3+2}\right)$ から　$(2,\ 1)$

Q の座標は $\left(\dfrac{(-2)\cdot5+3\cdot0}{3+(-2)},\ \dfrac{(-2)\cdot4+3\cdot(-1)}{3+(-2)}\right)$ から　$(-10,\ -11)$

よって，線分 PQ を $2:3$ に内分する点 R の座標は

$\left(\dfrac{3\cdot2+2\cdot(-10)}{2+3},\ \dfrac{3\cdot1+2\cdot(-11)}{2+3}\right)$ から　$\left(-\dfrac{14}{5},\ -\dfrac{19}{5}\right)$

(2)　G の座標は $\left(\dfrac{5+0+8}{3},\ \dfrac{4+(-1)+(-2)}{3}\right)$ から　$\left(\dfrac{13}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

3．(1) 点 $(-3,\ 2)$ を通り，直線 $3x-4y-6=0$ に平行な直線 ℓ と垂直な直線 ℓ' の方程式をそれぞれ求めよ。

(2)　2点 A$(2,\ 5)$，B$(-4,\ 3)$ を結ぶ線分の垂直二等分線

解答　(1)　$\ell：3x-4y+17=0$，$\ell'：4x+3y+6=0$　(2)　$3x+y-1=0$

(1)　直線 $3x-4y-6=0$ の傾きは $\dfrac{3}{4}$ である。

よって，直線 ℓ の方程式は

$y-2=\dfrac{3}{4}\{x-(-3)\}$　すなわち　$3x-4y+17=0$

次に，直線 ℓ' の傾きを m とすると，$\dfrac{3}{4}m=-1$ から　$m=-\dfrac{4}{3}$

よって，直線 ℓ' の方程式は

$y-2=-\dfrac{4}{3}\{x-(-3)\}$　すなわち　$4x+3y+6=0$

(2)　線分 AB の傾きは　$\dfrac{5-3}{2-(-4)}=\dfrac{1}{3}$

線分 AB の中点の座標は　$\left(\dfrac{2-4}{2},\ \dfrac{5+3}{2}\right)$ から　$(-1,\ 4)$

求める直線の傾きを m とすると，$\dfrac{1}{3}m=-1$ から　$m=-3$

よって，求める直線の方程式は

$y-4=-3\{x-(-1)\}$　すなわち　$3x+y-1=0$

4．直線 $3x+2y-6=0$ について，点 $(3,\ 1)$ と対称な点の座標を求めよ。

解答　$\left(\dfrac{9}{13},\ -\dfrac{7}{13}\right)$

求める点の座標を $(p,\ q)$ とする。

2点 $(3,\ 1)$，$(p,\ q)$ を通る直線が直線 $3x+2y-6=0$ に垂直であるから

$$\frac{q-1}{p-3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$$

すなわち　$2p-3q=3$　……①

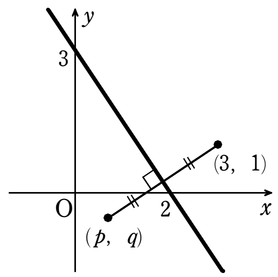
また，2点 $(3,\ 1)$，$(p,\ q)$ を結ぶ線分の中点が，直線 $3x+2y-6=0$ 上にあるから

$$3\cdot\frac{3+p}{2}+2\cdot\frac{1+q}{2}-6=0$$

すなわち　$3p+2q=1$　……②

①，② を連立して解くと　$p=\dfrac{9}{13}$，$q=-\dfrac{7}{13}$

したがって，求める点の座標は　$\left(\dfrac{9}{13},\ -\dfrac{7}{13}\right)$



5．3点 A$(3,\ 5)$，B$(5,\ 2)$，C$(1,\ 1)$ について，次のものを求めよ。

(1)　直線 BC の方程式　　(2)　線分 BC の長さ

(3)　点 A と直線 BC の距離　　(4)　△ABC の面積

解答　(1)　$x-4y+3=0$　(2)　$\sqrt{17}$　(3)　$\dfrac{14}{\sqrt{17}}$　(4)　7

(1)　直線 BC の方程式は　$(1-2)(x-5)-(1-5)(y-2)=0$

ゆえに　$x-4y+3=0$　……①

(2)　線分 BC の長さは

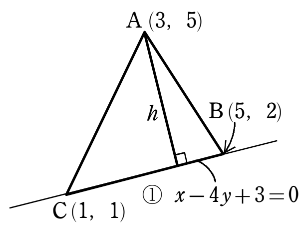
$\sqrt{(1-5)^2+(1-2)^2}=\sqrt{17}$

(3)　点 A と直線 BC の距離 h は

① から　$h=\dfrac{|3-4\cdot5+3|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\dfrac{14}{\sqrt{17}}$

(4)　(2)，(3) から，△ABC の面積 S は

$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot h=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{17}\cdot\dfrac{14}{\sqrt{17}}=7$



6．直線 $y=2x+k$ と円 $x^2+y^2=1$ が共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲を求めよ。また，接するときの k の値と接点の座標を求めよ。

解答　(前半)　$k<-\sqrt{5}$，$\sqrt{5}<k$

(後半)　$k=\sqrt{5}$ のとき $\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$，$k=-\sqrt{5}$ のとき $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$$\begin{cases} y=2x+k & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① を ② に代入して　$x^2+(2x+k)^2=1$

整理すると　$5x^2+4kx+k^2-1=0$　……③

判別式は　$\dfrac{D}{4}=4k^2-5(k^2-1)=-k^2+5=-(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})$

直線 ① と円 ② が共有点をもたないための条件は　$D<0$

ゆえに　$-(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})<0$　よって　$k<-\sqrt{5}$，$\sqrt{5}<k$

また，直線 ① と円 ② が接するための条件は　$D=0$

ゆえに　$-(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})=0$　よって　$k=\pm\sqrt{5}$

また，2次方程式 ③ が重解をもつとき，その重解は　$x=-\dfrac{4k}{2\cdot5}=-\dfrac{2k}{5}$

このとき，① から　$y=2\left(-\dfrac{2k}{5}\right)+k=\dfrac{k}{5}$

$k=\sqrt{5}$ のとき，接点の座標は　$\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$k=-\sqrt{5}$ のとき，接点の座標は　$\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

7．(1)　2点 $(-3,\ 6)$，$(3,\ -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(2)　3点 A$(-2,\ 6)$，B$(1,\ -3)$，C$(5,\ -1)$ を頂点とする △ABC の外接円の中心と半径を求めよ。

解答　(1)　$x^2+(y-2)^2=25$　(2)　中心は $(1,\ 2)$，半径は 5

(1)　この円の中心は，2点 $(-3,\ 6)$，$(3,\ -2)$ を結ぶ線分の中点で

$\left(\dfrac{-3+3}{2},\ \dfrac{6-2}{2}\right)$　すなわち　$(0,\ 2)$

半径 r は中心 $(0,\ 2)$ と点 $(-3,\ 6)$ の距離で

$r^2=(-3-0)^2+(6-2)^2=25$

よって，求める円の方程式は　$x^2+(y-2)^2=25$

(2)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

この円が点 A を通るから　$(-2)^2+6^2-2l+6m+n=0$

点 B を通るから　$1^2+(-3)^2+l-3m+n=0$

点 C を通るから　$5^2+(-1)^2+5l-m+n=0$

これらを整理して

$2l-6m-n=40$，$l-3m+n=-10$，$5l-m+n=-26$

これを解いて　$l=-2$，$m=-4$，$n=-20$

よって　$x^2+y^2-2x-4y-20=0$

これを変形して　$(x-1)^2+(y-2)^2=5^2$

したがって，求める円の中心は $(1,\ 2)$，半径は 5

8．円 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ 上の点 P$(4,\ 6)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$3x+4y=36$

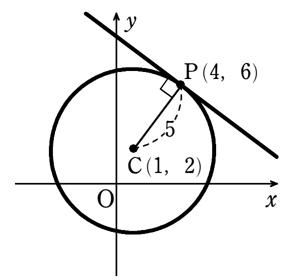
平方完成して　$(x-1)^2+(y-2)^2=25$　よって　中心 $(1,\ 2)$　半径 5

[解法1]　円の中心を C$(1,\ 2)$ とする。

求める接線は，点 P を通り，半径 CP に垂直な直線である。

直線 CP の傾きは $\dfrac{4}{3}$ であるから，求める接線の方程式は

$y-6=-\dfrac{3}{4}(x-4)$　すなわち　$3x+4y=36$



[解法2]　点 P における接線は x 軸に垂直でないから，接線の方程式は

$y-6=m(x-4)$　すなわち　$mx-y-4m+6=0$　……①

円の中心 $(1,\ 2)$ と直線 ① の距離が円の半径 5 に等しいから

$\dfrac{|m\cdot1-2-4m+6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5$　ゆえに　$|-3m+4|=5\sqrt{m^2+1}$

両辺を平方して　$(-3m+4)^2=25(m^2+1)$

整理すると　$(4m+3)^2=0$　よって　$m=-\dfrac{3}{4}$

これを ① に代入して整理すると　$3x+4y=36$

[解法 3]　①：$y=mx-4m+6$ を円の方程式に代入して整理すると

$$(m^2+1)x^2-2(4m^2-4m+1)x+8(2m^2-4m-1)=0$$

判別式 D は　$\dfrac{D}{4}=(4m^2-4m+1)^2-8(m^2+1)(2m^2-4m-1)$

$$=16m^2+24m+9=(4m+3)^2$$

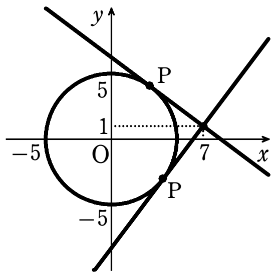
直線 ① と円が接するための条件は　$D=0$

したがって　$(4m+3)^2=0$　　よって　$m=-\dfrac{3}{4}$

これを ① に代入して整理すると　$3x+4y=36$

9. 点 (7, 1) を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式と，そのときの接点の座標を求めよ。

解答　$3x+4y=25$，(3, 4)；$4x-3y=25$，(4, −3)



接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると

$x_1{}^2+y_1{}^2=25$　…… ①

点 P におけるこの円の接線の方程式は

$x_1x+y_1y=25$

この直線が点 (7, 1) を通るから

$7x_1+y_1=25$　…… ②

①，② から y_1 を消去して整理すると

$x_1{}^2-7x_1+12=0$

よって　$(x_1-3)(x_1-4)=0$　　ゆえに　$x_1=3,\ 4$

② に代入して　$x_1=3$ のとき　$y_1=4$，　$x_1=4$ のとき　$y_1=-3$

したがって，求める接線の方程式と接点の座標は

$3x+4y=25$，(3, 4)；　$4x-3y=25$，(4, −3)

別解1　点 (7, 1) を通る接線は，x 軸に垂直でないから，求める接線の方程式は，傾きを m とすると次のようになる。

$y-1=m(x-7)$　すなわち　$y=mx-(7m-1)$　…… ③

③ を円の方程式に代入して整理すると

$(m^2+1)x^2-2m(7m-1)x+49m^2-14m-24=0$　…… ④

$m^2+1\neq 0$ であるから，2 次方程式 ④ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{-m(7m-1)\}^2-(m^2+1)(49m^2-14m-24)$$

$$=49m^4-14m^3+m^2-(49m^4-14m^3+25m^2-14m-24)$$

$$=-24m^2+14m+24=-2(4m+3)(3m-4)$$

円と直線 ③ が接するための条件は　$D=0$

よって　$m=-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{3}$

$m=-\dfrac{3}{4}$ のとき，④ の重解は　$x=\dfrac{m(7m-1)}{m^2+1}=3$

このとき　$y=mx-(7m-1)=-\dfrac{3}{4}\cdot 3-\left(-\dfrac{25}{4}\right)=4$

同様に，$m=\dfrac{4}{3}$ のとき，④ の重解は　$x=4$

このとき　$y=-3$

したがって，求める接線の方程式と接点の座標は

$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{25}{4}$，(3, 4)；$y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{25}{3}$，(4, −3)

別解2　(別解1 と 3 行目まで同じ)

③ から　$mx-y-(7m-1)=0$　…… ⑤

円の中心 (0, 0) と接線の距離が円の半径 5 に等しいから

$$\frac{|m\cdot 0-0-(7m-1)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5$$

両辺に $\sqrt{m^2+1}$ を掛けて　$|-7m+1|=5\sqrt{m^2+1}$

両辺を 2 乗して整理すると　$12m^2-7m-12=0$

ゆえに　$(4m+3)(3m-4)=0$

これを解いて　$m=-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{3}$

[1]　$m=-\dfrac{3}{4}$ のとき，⑤ は　$3x+4y-25=0$　…… ⑥

直線 OP は $y=\dfrac{4}{3}x$ と表されるから，⑥ と連立させて解くと，接点の座標は

(3, 4)

[2]　$m=\dfrac{4}{3}$ のとき，⑤ は　$4x-3y-25=0$　…… ⑦

直線 OP は $y=-\dfrac{3}{4}x$ と表されるから，⑦ と連立させて解くと，接点の座標は

(4, −3)

10. 点 (3, 1) から円 $x^2+y^2-2x+6y=0$ に引いた接線の方程式を求めよ。

解答　$y=-3x+10$，$y=\dfrac{1}{3}x$

$x^2+y^2-2x+6y=0$ を変形すると　$(x-1)^2+(y+3)^2=10$　…… ①

この円は中心 (1, −3)，半径 $\sqrt{10}$ であるから，点 (3, 1) から引いた接線は x 軸に垂直ではない。

接線の方程式を　$y=m(x-3)+1$　…… ② とすると

$mx-y-3m+1=0$

円 ① の中心 (1, −3) と接線の距離が，円の半径 $\sqrt{10}$ に等しいから

$$\frac{|m\cdot 1-(-3)-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

分母を払って　$|-2m+4|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$

両辺を平方して　$(-2m+4)^2=10(m^2+1)$

整理すると　$3m^2+8m-3=0$

ゆえに　$(m+3)(3m-1)=0$　　よって　$m=-3,\ \dfrac{1}{3}$

したがって，接線の方程式は　$y=-3x+10$，$y=\dfrac{1}{3}x$

別解　② を ① に代入して　$(x-1)^2+\{m(x-3)+4\}^2=10$

展開して整理すると

$$(m^2+1)x^2-2(3m^2-4m+1)x+9m^2-24m+7=0$$

円 ① と直線 ② が接するための条件は，この x についての 2 次方程式の判別式を D とすると　$D=0$

$$\frac{D}{4}=(3m^2-4m+1)^2-(m^2+1)(9m^2-24m+7)$$

$$=(9m^4+16m^2+1-24m^3-8m+6m^2)-(9m^4-24m^3+7m^2+9m^2-24m+7)$$

$$=2(3m^2+8m-3)=2(m+3)(3m-1)$$

であるから　$(m+3)(3m-1)=0$

よって　$m=-3,\ \dfrac{1}{3}$

したがって，接線の方程式は　$y=-3x+10$，$y=\dfrac{1}{3}x$

11. 2 円 $x^2+y^2-4x-2y-8=0$，$x^2+y^2=4$ の 2 つの交点と原点 を通る円の中心の座標と半径を求めよ。

解答　中心 (−2, −1)　半径 $\sqrt{5}$

k を定数として，方程式

$x^2+y^2-4x-2y-8+k(x^2+y^2-4)=0$　…… ①

を考えると，① の表す図形は 2 つの円の交点を通る。

これが A (0, 0) を通るとき　$-8-4k=0$

よって　$k=-2$

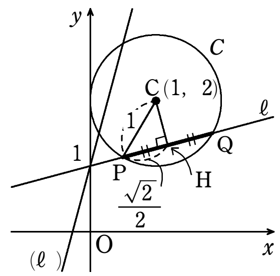
これを ① に代入して整理すると　$x^2+y^2+4x+2y=0$

これが求める円の方程式である。

よって　$(x+2)^2+(y+1)^2=5$　より　中心 (−2, −1)　半径 $\sqrt{5}$

12. 円 $C：x^2+y^2-2x-4y+4=0$ と直線 $\ell：y=mx+1$ について，ℓ が C によって切り取られる線分の長さが $\sqrt{2}$ であるとき，定数 m の値を求めよ。

解答　$m=2\pm\sqrt{3}$



円の方程式を変形すると　$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

よって，円 C の中心を C とすると，C (1, 2)，半径は 1 である。

円と直線の交点を P，Q とし，点 C から直線 ℓ に引いた垂線を CH とすると　$\mathrm{CH}^2+\mathrm{PH}^2=\mathrm{CP}^2$　…… ①

線分 CH の長さは円 C の中心と直線 ℓ の距離に等しいから

$\mathrm{CH}=\dfrac{|m\cdot 1-1\cdot 2+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$　…… ②

また　$\mathrm{PH}=\dfrac{\mathrm{PQ}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\mathrm{CP}=1$ (半径)

これらを ① に代入して

$\left(\dfrac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$　すなわち　$\dfrac{(m-1)^2}{m^2+1}+\dfrac{1}{2}=1$

分母を払って整理すると　$m^2-4m+1=0$

これを解いて　$m=2\pm\sqrt{3}$

別解　$y=mx+1$ を円の方程式に代入して整理すると

$(m^2+1)x^2-2(m+1)x+1=0$　…… ①

円と直線の交点の座標を $(\alpha,\ m\alpha+1)$，$(\beta,\ m\beta+1)$ とすると，α，β は 2 次方程式 ① の解であるから，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=\dfrac{2(m+1)}{m^2+1}$，　$\alpha\beta=\dfrac{1}{m^2+1}$　…… ②

求める条件は　$(\beta-\alpha)^2+\{(m\beta+1)-(m\alpha+1)\}^2=(\sqrt{2})^2$

(右辺) $=(\beta-\alpha)^2+m^2(\beta-\alpha)^2=(m^2+1)(\beta-\alpha)^2=(m^2+1)\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$

であるから，② を代入して

$$(m^2+1)\left\{\frac{4(m+1)^2}{(m^2+1)^2}-\frac{4}{m^2+1}\right\}=2$$

分母を払って整理すると　$m^2-4m+1=0$

これを解いて　$m=2\pm\sqrt{3}$