統一テスト（図形と方程式）Ｈ２３．３．１７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．　2 点 A$(-1,\ 4)$，B$(3,\ 2)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めよ。

２．座標平面上に 3 点 A$(3,\ 4)$，B$(-3,\ 1)$，C$(5,\ -2)$ がある。このとき，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB の中点 M
(2)　線分 AB を 2 : 1 に内分する点 D
(3)　線分 AC を 3 : 1 に外分する点 E
(4)　△MDEの重心G

３．(1)　点 $(1,\ -2)$ を通り，2 点 $(-3,\ 4)$，$(7,\ -1)$ を通る直線に平行な直線と垂直な直線の方程式を，それぞれ求めよ。

(2)　2 点 A$(-2,\ 1)$，B$(4,\ -2)$ を結ぶ線分の垂直二等分線の方程式を求めよ。

４．直線 $x+2y-3=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して，点 P$(0,\ -2)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

５．3 点 A$(1,\ 1)$，B$(3,\ 5)$，C$(5,\ 2)$ について，次のものを求めよ。

(1)　直線 BC の方程式　　(2)　線分 BC の長さ
(3)　点 A と直線 BC の距離　　(4)　△ABC の面積

６．円 $x^2+2x+y^2=1$ ……① と直線 $y=mx-m$ ……② が異なる 2 点で交わるような，定数 m の値の範囲を求めよ。

7．(1)　2点 $(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(2)　3点 $(3,\ 1)$，$(6,\ -8)$，$(-2,\ -4)$ を通る円の方程式を求めよ。

8．円 $x^2+y^2=16$ が直線 $y=x+2$ から切り取る線分の長さを求めよ。

9．点 $(7,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式と，そのときの接点の座標を求めよ。

10. 円 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ 上の点 $(4,\ 6)$ における，この円の接線の方程式を求めよ。

11. 点 $(2,\ 3)$ を通り，y 軸に接して中心が直線 $y=x+2$ 上にある円の方程式を求めよ。

12. 2円 $x^2+y^2=5$，$(x-1)^2+(y-2)^2=4$ について

(1)　2円の交点を通る直線の方程式を求めよ。

(2)　2円の交点と点 $(1,\ 3)$ を通る円の方程式を求めよ。

統一テスト（図形と方程式）Ｈ２３．３．１７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1． 2点 $A(-1,\ 4)$，$B(3,\ 2)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めよ。

解答　$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$

解説

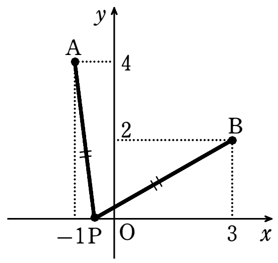
点 P の座標を $P(x,\ 0)$ とする。

$PA=PB$ すなわち $PA^2=PB^2$ から

$$(-1-x)^2+(4-0)^2=(3-x)^2+(2-0)^2$$

整理すると　$8x=-4$　　よって　$x=-\frac{1}{2}$

ゆえに，点 P の座標は　$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$



2．座標平面上に3点 $A(3,\ 4)$，$B(-3,\ 1)$，$C(5,\ -2)$ がある。このとき，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB の中点 M

(2)　線分 AB を $2:1$ に内分する点 D

(3)　線分 AC を $3:1$ に外分する点 E

(4)　△MDEの重心G

解答　(1)　$M\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$　　(2)　$D(-1,\ 2)$　　(3)　$E(6,\ -5)$　(4)　$G\left(\frac{5}{3},\ -\frac{1}{6}\right)$

解説

(1)　$\left(\frac{3+(-3)}{2},\ \frac{4+1}{2}\right)$　すなわち　$M\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$

(2)　$\left(\frac{1\cdot3+2\cdot(-3)}{2+1},\ \frac{1\cdot4+2\cdot1}{2+1}\right)$　すなわち　$D(-1,\ 2)$

(3)　$\left(\frac{(-1)\cdot3+3\cdot5}{3-1},\ \frac{(-1)\cdot4+3\cdot(-2)}{3-1}\right)$　すなわち　$E(6,\ -5)$

(4)　$\left(\frac{0+(-1)+6}{3},\ \frac{\frac{5}{2}+2+(-5)}{3}\right)$　すなわち　$G\left(\frac{5}{3},\ -\frac{1}{6}\right)$

3．(1)　点 $(1,\ -2)$ を通り，2点 $(-3,\ 4)$，$(7,\ -1)$ を通る直線に平行な直線と垂直な直線の方程式を，それぞれ求めよ。

(2)　2点 $A(-2,\ 1)$，$B(4,\ -2)$ を結ぶ線分の垂直二等分線の方程式を求めよ。

解答　(1)　平行な直線の方程式は $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$，垂直な直線の方程式は $y=2x-4$

(2)　$y=2x-\frac{5}{2}$

解説

(1)　2点 $(-3,\ 4)$，$(7,\ -1)$ を通る直線を ℓ とする。

直線 ℓ の傾きは　$\frac{-1-4}{7-(-3)}=-\frac{1}{2}$

点 $(1,\ -2)$ を通り，直線 ℓ に平行な直線の方程式は

$$y-(-2)=-\frac{1}{2}(x-1)\quad すなわち\quad y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

直線 ℓ に垂直な直線の傾きを m とすると

$$-\frac{1}{2}m=-1\qquad これを解いて\qquad m=2$$

よって，点 $(1,\ -2)$ を通り，直線 ℓ に垂直な直線の方程式は

$$y-(-2)=2(x-1)\quad すなわち\quad y=2x-4$$

(2)　線分 AB の中点 M の座標は　$M\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$

線分 AB の傾きは　$\frac{-2-1}{4-(-2)}=-\frac{1}{2}$

線分 AB の垂直二等分線の傾きを m とすると　$-\frac{1}{2}m=-1$

これを解いて　$m=2$

よって，求める直線の方程式は，点 M を通るから

$$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=2(x-1)\quad すなわち\quad y=2x-\frac{5}{2}$$

4．直線 $x+2y-3=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して，点 $P(0,\ -2)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

解答　$\left(\frac{14}{5},\ \frac{18}{5}\right)$

解説

点 Q の座標を $(p,\ q)$ とする。

直線 PQ は ℓ に垂直であるから

$$\frac{q+2}{p}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

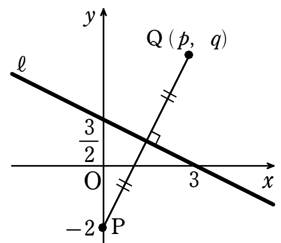
ゆえに　$2p=q+2$　……①

また，線分 PQ の中点 $\left(\frac{p}{2},\ \frac{q-2}{2}\right)$ は直線 ℓ 上にあるから

$$\frac{p}{2}+2\cdot\frac{q-2}{2}-3=0$$

ゆえに　$p+2q=10$　……②

①，②を解いて　$p=\frac{14}{5}$，$q=\frac{18}{5}$　　　よって　$Q\left(\frac{14}{5},\ \frac{18}{5}\right)$



5．3点 $A(1,\ 1)$，$B(3,\ 5)$，$C(5,\ 2)$ について，次のものを求めよ。

(1)　直線 BC の方程式　　　(2)　線分 BC の長さ

(3)　点 A と直線 BC の距離　　　(4)　△ABC の面積

解答　(1)　$3x+2y-19=0$　　(2)　$\sqrt{13}$　　(3)　$\frac{14}{\sqrt{13}}$　　(4)　7

解説

(1)　2点 $B(3,\ 5)$，$C(5,\ 2)$ を通る直線 BC の方程式は

$$y-5=\frac{2-5}{5-3}(x-3)\quad すなわち\quad 3x+2y-19=0$$

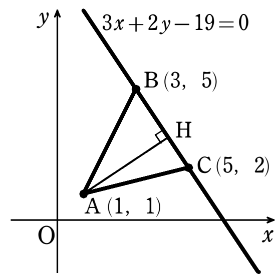
(2)　$BC=\sqrt{(5-3)^2+(2-5)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

(3)　点 A と直線 BC の距離，すなわち，点 A から BC に下ろした垂線 AH の長さは

$$AH=\frac{|3\cdot1+2\cdot1-19|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{14}{\sqrt{13}}$$

(4)　(2)，(3) から

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{14}{\sqrt{13}}=7$$



6．円 $x^2+2x+y^2=1$ ……① と直線 $y=mx-m$ ……② が異なる2点で交わるような，定数 m の値の範囲を求めよ。

解答　$-1<m<1$

解説

[解法1]　②を①に代入して整理すると　$(m^2+1)x^2-2(m^2-1)x+m^2-1=0$

判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=\{-(m^2-1)\}^2-(m^2+1)(m^2-1)$

$$=-2m^2+2=-2(m+1)(m-1)$$

円①と直線②が異なる2点で交わるための条件は　$D>0$

よって　$-2(m+1)(m-1)>0$　　ゆえに　$-1<m<1$

[解法2]　①を変形すると　$(x+1)^2+y^2=(\sqrt{2})^2$

よって，円①の中心は $(-1,\ 0)$，半径は $\sqrt{2}$ である。

円①の中心と直線②の距離を d とすると，異なる2点で交わるための条件は　$d<\sqrt{2}$

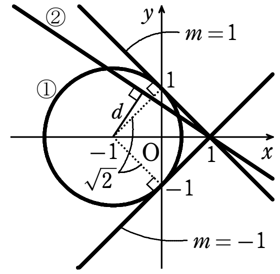
$d=\frac{|m\cdot(-1)-0-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$ であるから

$$\frac{2|m|}{\sqrt{m^2+1}}<\sqrt{2}$$

両辺に正の数 $\sqrt{m^2+1}$ を掛けて　$2|m|<\sqrt{2(m^2+1)}$

両辺は負でないから，2乗して　$4m^2<2(m^2+1)$

よって　$(m+1)(m-1)<0$　　ゆえに　$-1<m<1$



7．(1)　2点 $(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(2)　3点 $(3,\ 1)$，$(6,\ -8)$，$(-2,\ -4)$ を通る円の方程式を求めよ。

解答　(1)　$(x-4)^2+(y-1)^2=10$　　(2)　$x^2+y^2-6x+8y=0$

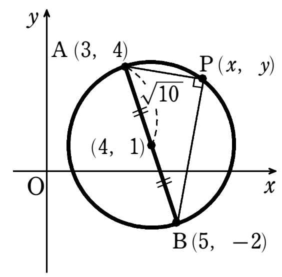
解説

(1)　この円の中心は，2点 $(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$ を結ぶ線分の中点であるから，その座標は　$(4,\ 1)$

半径 r は中心 $(4,\ 1)$ と円上の点 $(3,\ 4)$ との距離であるから　$r^2=(4-3)^2+(1-4)^2=10$

よって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y-1)^2=10$$



(2)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 $(3,\ 1)$ を通るから　$3^2+1^2+3l+m+n=0$

点 $(6,\ -8)$ を通るから　$6^2+(-8)^2+6l-8m+n=0$

点 $(-2,\ -4)$ を通るから　$(-2)^2+(-4)^2-2l-4m+n=0$

整理すると

$$3l+m+n+10=0$$
$$6l-8m+n+100=0$$
$$2l+4m-n-20=0$$

これを解いて　$l=-6$，$m=8$，$n=0$

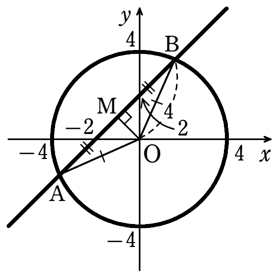
よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-6x+8y=0$

8．円 $x^2+y^2=16$ が直線 $y=x+2$ から切り取る線分の長さを求めよ。

解答　$2\sqrt{14}$

解説

円と直線の交点を A，B とし，線分 AB の中点を M とする。



線分 OM の長さは，円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $y=x+2$ の距離に等しいから

$$\mathrm{OM}=\frac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

円の半径は 4 であるから

$$\mathrm{AB}=2\mathrm{AM}=2\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OM}^2}$$
$$=2\sqrt{4^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{14}$$

別解　直線の方程式を円の方程式に代入して整理すると

$$x^2+2x-6=0 \quad \cdots\cdots ①$$

① の実数解を α，β とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-6$$

円と直線の交点の座標は $(\alpha,\ \alpha+2)$，$(\beta,\ \beta+2)$ であるから，求める線分の長さは

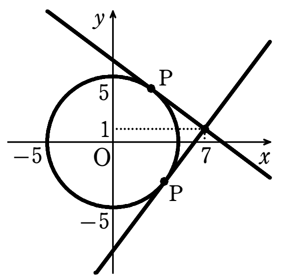
$$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+2)-(\alpha+2)\}^2}=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}$$
$$=\sqrt{2\{(-2)^2-4\cdot(-6)\}}=2\sqrt{14}$$

9．点 $(7,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式と，そのときの接点の座標を求めよ。

解答　$3x+4y=25$，$(3,\ 4)$；$4x-3y=25$，$(4,\ -3)$

解説

接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると



$$x_1{}^2+y_1{}^2=25 \quad \cdots\cdots ①$$

点 P におけるこの円の接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=25$$

この直線が点 $(7,\ 1)$ を通るから

$$7x_1+y_1=25 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から y_1 を消去して整理すると

$$x_1{}^2-7x_1+12=0$$

よって　$(x_1-3)(x_1-4)=0$　　ゆえに　$x_1=3,\ 4$

② に代入して　$x_1=3$ のとき　$y_1=4$，　$x_1=4$ のとき　$y_1=-3$

したがって，求める接線の方程式と接点の座標は

$$3x+4y=25,\ (3,\ 4)；\quad 4x-3y=25,\ (4,\ -3)$$

別解 1　点 $(7,\ 1)$ を通る接線は，x 軸に垂直でないから，求める接線の方程式は，傾きを m とすると次のようになる。

$$y-1=m(x-7) \quad すなわち \quad y=mx-(7m-1) \quad \cdots\cdots ③$$

③ を円の方程式に代入して整理すると

$$(m^2+1)x^2-2m(7m-1)x+49m^2-14m-24=0 \quad \cdots\cdots ④$$

$m^2+1\neq 0$ であるから，2 次方程式 ④ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{-m(7m-1)\}^2-(m^2+1)(49m^2-14m-24)$$
$$=49m^4-14m^3+m^2-(49m^4-14m^3+25m^2-14m-24)$$
$$=-24m^2+14m+24=-2(4m+3)(3m-4)$$

円と直線 ③ が接するための条件は　$D=0$

よって　$m=-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{3}$

$m=-\dfrac{3}{4}$ のとき，④ の重解は　$x=\dfrac{m(7m-1)}{m^2+1}=3$

このとき　$y=mx-(7m-1)=-\dfrac{3}{4}\cdot 3-\left(-\dfrac{25}{4}\right)=4$

同様に，$m=\dfrac{4}{3}$ のとき，④ の重解は　$x=4$

このとき　$y=-3$

したがって，求める接線の方程式と接点の座標は

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4},\ (3,\ 4)；\ y=\frac{4}{3}x-\frac{25}{3},\ (4,\ -3)$$

別解 2　（別解 1 と 3 行目まで同じ）

③ から　$mx-y-(7m-1)=0 \quad \cdots\cdots ⑤$

円の中心 $(0,\ 0)$ と接線の距離が円の半径 5 に等しいから

$$\frac{|m\cdot 0-0-(7m-1)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5$$

両辺に $\sqrt{m^2+1}$ を掛けて　$|-7m+1|=5\sqrt{m^2+1}$

両辺を 2 乗して整理すると　$12m^2-7m-12=0$

ゆえに　$(4m+3)(3m-4)=0$

これを解いて　$m=-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{3}$

[1]　$m=-\dfrac{3}{4}$ のとき，⑤ は　$3x+4y-25=0 \quad \cdots\cdots ⑥$

直線 OP は $y=\dfrac{4}{3}x$ と表されるから，⑥ と連立させて解くと，接点の座標は

$(3,\ 4)$

[2]　$m=\dfrac{4}{3}$ のとき，⑤ は　$4x-3y-25=0 \quad \cdots\cdots ⑦$

直線 OP は $y=-\dfrac{3}{4}x$ と表されるから，⑦ と連立させて解くと，接点の座標は

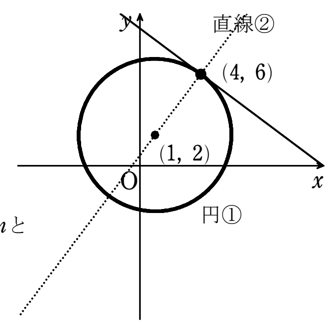
$(4,\ -3)$

10．円 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ 上の点 $(4,\ 6)$ における，この円の接線の方程式を求めよ。

解答　$3x+4y-36=0$

解説

$x^2+y^2-2x-4y-20=0$ を変形すると



$$(x-1)^2+(y-2)^2=25 \quad \cdots\cdots ①$$

よって中心 $(1,\ 2)$ である。

円①の中心と点 $(4,\ 6)$ の 2 点を通る直線②の傾きは

$$\frac{6-2}{4-1}=\frac{4}{3}$$

求める接線は直線②に垂直なので，接線の傾きを m とすると

$$\frac{4}{3}\cdot m=-1 \quad すなわち \quad m=-\frac{3}{4}$$

ゆえに求める接線は，点 $(4,\ 6)$ を通り，傾き $m=-\dfrac{3}{4}$ なので

$$y-6=-\frac{3}{4}(x-4)$$

整理すると　$3x+4y-36=0$

11．点 $(2,\ 3)$ を通り，y 軸に接して中心が直線 $y=x+2$ 上にある円の方程式を求めよ。

解答　$(x-1)^2+(y-3)^2=1$，$(x-5)^2+(y-7)^2=25$

解説

中心が直線 $y=x+2$ 上にあるから，その座標は $(a,\ a+2)$ と表される。

中心と y 軸の距離が半径に等しいから，求める円の方程式は

$$(x-a)^2+\{y-(a+2)\}^2=a^2 \quad \cdots\cdots ①$$

円 ① が点 $(2,\ 3)$ を通るから　$(2-a)^2+(3-a-2)^2=a^2$

整理して　$a^2-6a+5=0$　　ゆえに　$(a-1)(a-5)=0$

これを解いて　$a=1,\ 5$

よって，求める円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-3)^2=1,\ (x-5)^2+(y-7)^2=25$$

12．2 円 $x^2+y^2=5$，$(x-1)^2+(y-2)^2=4$ について

(1)　2 円の交点を通る直線の方程式を求めよ。

(2)　2 円の交点と点 $(1,\ 3)$ を通る円の方程式を求めよ。

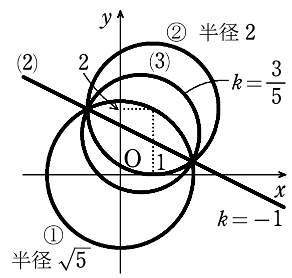
解答　(1)　$x+2y-3=0$　　(2)　$4x^2+4y^2-5x-10y-5=0$

解説

与えられた円を順に ①，② とする。

(1)　$k(x^2+y^2-5)+(x-1)^2+(y-2)^2-4=0$（$k$ は定数）……③ とすると，③ は 2 円 ①，② の交点を通る円，または直線を表す。

③ に $k=-1$ を代入すると



$$-(x^2+y^2-5)+(x-1)^2+(y-2)^2-4=0$$

整理すると　$x+2y-3=0$

これは直線を表すから，求める方程式である。

(2)　③ が点 $(1,\ 3)$ を通るとして，③ に $x=1$，$y=3$ を代入して整理すると

$$5k-3=0 \qquad よって \qquad k=\frac{3}{5}$$

これを ③ に代入して整理すると

$$4x^2+4y^2-5x-10y-5=0$$

これは円を表すから，求める方程式である。