数学演習（図形と方程式）Ｈ２３．３．１０

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．2 点 A$(2,\ 1)$，B$(5,\ -2)$ から等距離にある x 軸上の点の座標を求めよ。

２．3 点 A$(5,\ 4)$，B$(0,\ -1)$，C$(8,\ -2)$ について，線分 AB を 2：3 に外分する点を P，3：2 に外分する点を Q とし，△ABC の重心を G とする。

(1)　線分 PQ の中点 M の座標を求めよ。

(2)　点 G の座標を求めよ。

３．点$(3,\ 2)$ を通り，2 点$(-3,\ -2)$，$(5,\ 7)$ を結ぶ線分に平行な直線と垂直な直線の方程式を，それぞれ求めよ。

４．直線$3x+2y-6=0$について，点$(3,\ 1)$と対称な点の座標を求めよ。

５．2 直線 $2x-3y+4=0$，$x+2y-5=0$ の交点と点$(0,\ 3)$ を通る直線の方程式を求めよ。

６．次の 3 点を通る円の方程式を求めよ。　$(-3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(1,\ -4)$

７. 点 $(1,\ 2)$ を通り，x 軸と y 軸の両方に接する円の方程式を求めよ。

８. 直線 $y=2x+k$ と円 $x^2+y^2=1$ が共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲を求めよ。
また，接するときの k の値と接点の座標を求めよ。

９. 円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 上の点 $(5,\ 7)$ における接線の方程式を求めよ。

10. 点 $(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2-2x+6y=0$ に引いた接線の方程式を求めよ。

11. 円 $(x+3)^2+y^2=9$ が直線 $y=x+k$ から切り取る弦の長さが $2\sqrt{7}$ のとき，定数 k の値を求めよ。

12. ２円 $x^2+y^2-4x-2y-8=0$，$x^2+y^2=4$ の２つの交点と原点 を通る円の中心の座標と半径を求めよ。

1．2 点 A$(2,\ 1)$，B$(5,\ -2)$ から等距離にある x 軸上の点の座標を求めよ。

解答　$(4,\ 0)$

求める点を P$(x,\ 0)$ とする。

AP＝BP から　　$AP^2=BP^2$

したがって　　$(x-2)^2+(0-1)^2=(x-5)^2+\{0-(-2)\}^2$

整理して　　$6x-24=0$

よって　　$x=4$

ゆえに，求める点の座標は　　$(4,\ 0)$

2．3 点 A$(5,\ 4)$，B$(0,\ -1)$，C$(8,\ -2)$ について，線分 AB を 2：3 に外分する点を P，3：2 に外分する点を Q とし，△ABC の重心を G とする。

(1)　線分 PQ の中点 M の座標を求めよ。

(2)　点 G の座標を求めよ。

解答　(1)　$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$　　(2)　$\left(\dfrac{13}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

(1)　P の座標は　$\left(\dfrac{-3\cdot5+2\cdot0}{2-3},\ \dfrac{-3\cdot4+2\cdot(-1)}{2-3}\right)$ から　　$(15,\ 14)$

Q の座標は　$\left(\dfrac{-2\cdot5+3\cdot0}{3-2},\ \dfrac{-2\cdot4+3\cdot(-1)}{3-2}\right)$ から　　$(-10,\ -11)$

よって，線分 PQ の中点 M の座標は

$$\left(\frac{15+(-10)}{2},\ \frac{14+(-11)}{2}\right) \text{ から } \quad \left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

(2)　G の座標は　$\left(\dfrac{5+0+8}{3},\ \dfrac{4+(-1)+(-2)}{3}\right)$ から　　$\left(\dfrac{13}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

3．点 $(3,\ 2)$ を通り，2 点 $(-3,\ -2)$，$(5,\ 7)$ を結ぶ線分に平行な直線と垂直な直線の方程式を，それぞれ求めよ。

解答　順に $9x-8y-11=0$，$8x+9y-42=0$

2 点 $(-3,\ -2)$，$(5,\ 7)$ を結ぶ線分の傾きは　　$\dfrac{7-(-2)}{5-(-3)}=\dfrac{9}{8}$

[1]　平行な直線の方程式は

$$y-2=\frac{9}{8}(x-3) \quad \text{すなわち} \quad 9x-8y-11=0$$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると　　$\dfrac{9}{8}m=-1$　　よって　　$m=-\dfrac{8}{9}$

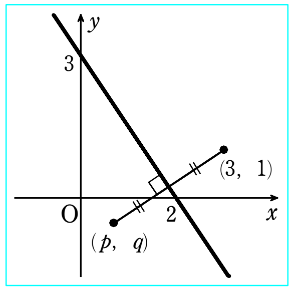
したがって，求める垂直な直線の方程式は

$$y-2=-\frac{8}{9}(x-3) \quad \text{すなわち} \quad 8x+9y-42=0$$

4．直線 $3x+2y-6=0$ について，点 $(3,\ 1)$ と対称な点の座標を求めよ。

解答　$\left(\dfrac{9}{13},\ -\dfrac{7}{13}\right)$

求める点の座標を $(p,\ q)$ とする。



2 点 $(3,\ 1)$，$(p,\ q)$ を通る直線が直線 $3x+2y-6=0$ に垂直であるから

$$\frac{q-1}{p-3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$$

すなわち　　$2p-3q=3$　……①

また，2 点 $(3,\ 1)$，$(p,\ q)$ を結ぶ線分の中点が，直線 $3x+2y-6=0$ 上にあるから

$$3\cdot\frac{3+p}{2}+2\cdot\frac{1+q}{2}-6=0$$

すなわち　　$3p+2q=1$　……②

①，② を連立して解くと　　$p=\dfrac{9}{13}$，$q=-\dfrac{7}{13}$

したがって，求める点の座標は　　$\left(\dfrac{9}{13},\ -\dfrac{7}{13}\right)$

5．2 直線 $2x-3y+4=0$，$x+2y-5=0$ の交点と点 $(0,\ 3)$ を通る直線の方程式を求めよ。

解答　$x+y-3=0$

k を定数として，方程式

$$2x-3y+4+k(x+2y-5)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

を考えると，① は直線を表し，その直線は 2 直線 $2x-3y+4=0$，$x+2y-5=0$ の交点を通る。

直線 ① が点 $(0,\ 3)$ を通るから　　$-9+4+k(6-5)=0$　　よって　　$k=5$

これを ① に代入して整理すると　　$x+y-3=0$

6．次の 3 点を通る円の方程式を求めよ。　$(-3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(1,\ -4)$

解答　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 $(-3,\ 4)$ を通るから　　$(-3)^2+4^2-3l+4m+n=0$

ゆえに　　$3l-4m-n=25$　……①

点 $(4,\ 5)$ を通るから　　$4^2+5^2+4l+5m+n=0$

ゆえに　　$4l+5m+n=-41$　……②

点 $(1,\ -4)$ を通るから　　$1^2+(-4)^2+l-4m+n=0$

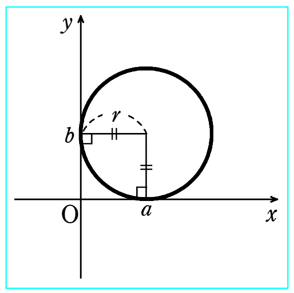
ゆえに　　$l-4m+n=-17$　……③

①，②，③ を解いて　　$l=-2$，$m=-2$，$n=-23$

よって　　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

7．点 $(1,\ 2)$ を通り，x 軸と y 軸の両方に接する円の方程式を求めよ。

解答　$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$(x-5)^2+(y-5)^2=25$



両座標軸に接し，点 $(1,\ 2)$ を通るから，円の中心は第 1 象限にある。

円の中心の座標を $(a,\ b)$，半径を r とすると

$a>0$，$b>0$ で　　$a=b=r$

よって，円の方程式は　　$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

これが点 $(1,\ 2)$ を通るから　$(1-r)^2+(2-r)^2=r^2$

整理して　$r^2-6r+5=0$　　ゆえに　$r=1,\ 5$

よって，求める円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ (x-5)^2+(y-5)^2=25$$

8．直線 $y=2x+k$ と円 $x^2+y^2=1$ が共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲を求めよ。また，接するときの k の値と接点の座標を求めよ。

解答　(前半) $k<-\sqrt{5}$，$\sqrt{5}<k$

(後半) $k=\sqrt{5}$ のとき $\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$，$k=-\sqrt{5}$ のとき $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$$\begin{cases} y=2x+k & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① を ② に代入して　　$x^2+(2x+k)^2=1$

整理すると　　$5x^2+4kx+k^2-1=0$　……③

判別式は　　$\dfrac{D}{4}=4k^2-5(k^2-1)=-k^2+5=-(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})$

直線 ① と円 ② が共有点をもたないための条件は　　$D<0$

ゆえに　　$-(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})<0$　　よって　　$k<-\sqrt{5}$，$\sqrt{5}<k$

また，直線 ① と円 ② が接するための条件は　　$D=0$

ゆえに　　$-(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})=0$　　よって　　$k=\pm\sqrt{5}$

また，2 次方程式 ③ が重解をもつとき，その重解は　　$x=-\dfrac{4k}{2\cdot5}=-\dfrac{2k}{5}$

このとき，① から　　$y=2\left(-\dfrac{2k}{5}\right)+k=\dfrac{k}{5}$

$k=\sqrt{5}$ のとき，接点の座標は　　$\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$k=-\sqrt{5}$ のとき，接点の座標は　　$\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

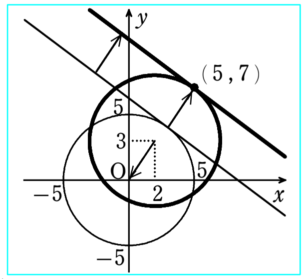
9．円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 上の点 $(5,\ 7)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$3x+4y=43$

円の中心 $(2,\ 3)$ と点 $(5,\ 7)$ を通る直線の傾きは　　$\dfrac{7-3}{5-2}=\dfrac{4}{3}$

求める接線は，この直線に垂直で，点 $(5,\ 7)$ を通るから，その方程式は

$$y-7=-\frac{3}{4}(x-5) \quad \text{すなわち} \quad 3x+4y=43$$



別解　円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$　……① を，

中心 $(2,\ 3)$ が原点 $(0,\ 0)$ にくるように平行移動すると

円 $x^2+y^2=25$　……②

になる。

この平行移動により，円 ① 上の点 $(5,\ 7)$ は点 $(3,\ 4)$ に移る。

点 $(3,\ 4)$ における円 ② の接線の方程式は

$3x+4y=25$　……③

求める接線は，③ を x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したもので，その方程式は

$$3(x-2)+4(y-3)=25 \quad \text{すなわち} \quad 3x+4y=43$$

10．点 $(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2-2x+6y=0$ に引いた接線の方程式を求めよ。

解答　$y=-3x+10$，$y=\dfrac{1}{3}x$

$x^2+y^2-2x+6y=0$ を変形すると　$(x-1)^2+(y+3)^2=10$　…… ①

この円は中心 $(1,\ -3)$，半径 $\sqrt{10}$ であるから，点 $(3,\ 1)$ から引いた接線は x 軸に垂直ではない。

接線の方程式を　$y=m(x-3)+1$　…… ② とすると

$$mx-y-3m+1=0$$

円 ① の中心 $(1,\ -3)$ と接線の距離が，円の半径 $\sqrt{10}$ に等しいから

$$\frac{|m\cdot 1-(-3)-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

分母を払って　$|-2m+4|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$

両辺を平方して　$(-2m+4)^2=10(m^2+1)$

整理すると　$3m^2+8m-3=0$

ゆえに　$(m+3)(3m-1)=0$　　よって　$m=-3,\ \dfrac{1}{3}$

したがって，接線の方程式は　$y=-3x+10,\ y=\dfrac{1}{3}x$

別解　② を ① に代入して　$(x-1)^2+\{m(x-3)+4\}^2=10$

展開して整理すると

$$(m^2+1)x^2-2(3m^2-4m+1)x+9m^2-24m+7=0$$

円 ① と直線 ② が接するための条件は，この x についての 2 次方程式の判別式を D とすると　$D=0$

$$\frac{D}{4}=(3m^2-4m+1)^2-(m^2+1)(9m^2-24m+7)$$
$$=(9m^4+16m^2+1-24m^3-8m+6m^2)-(9m^4-24m^3+7m^2+9m^2-24m+7)$$
$$=2(3m^2+8m-3)=2(m+3)(3m-1)$$

であるから　$(m+3)(3m-1)=0$

よって　$m=-3,\ \dfrac{1}{3}$

したがって，接線の方程式は　$y=-3x+10,\ y=\dfrac{1}{3}x$

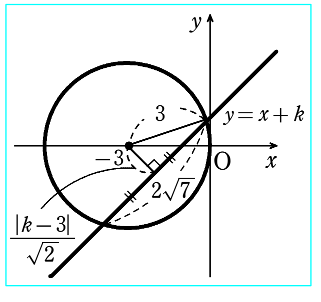
11. 円 $(x+3)^2+y^2=9$ が直線 $y=x+k$ から切り取る弦の長さが $2\sqrt{7}$ のとき，定数 k の値を求めよ。

解答　$k=1,\ 5$

円の中心の座標は点 $(-3,\ 0)$，半径は 3 である。

点 $(-3,\ 0)$ と直線 $y=x+k$ すなわち $x-y+k=0$

の距離は　$\dfrac{|1\cdot(-3)-1\cdot 0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k-3|}{\sqrt{2}}$



題意の条件を満たすとき，三平方の定理から

$$\left(\frac{|k-3|}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{7}}{2}\right)^2=3^2$$

すなわち　$\dfrac{(k-3)^2}{2}+7=9$

ゆえに　$k-3=\pm 2$

よって　$k=1,\ 5$

12. 2 円 $x^2+y^2-4x-2y-8=0$，$x^2+y^2=4$ の 2 つの交点と原点 を通る円の中心の座標と半径を求めよ。

解答　中心 $(-2,\ -1)$　半径 $\sqrt{5}$

k を定数として，方程式

$$x^2+y^2-4x-2y-8+k(x^2+y^2-4)=0\quad \cdots\cdots ①$$

を考えると，① の表す図形は 2 つの円の交点を通る。

これが A $(0,\ 0)$ を通るとき　$-8-4k=0$

よって　$k=-2$

これを ① に代入して整理すると　$x^2+y^2+4x+2y=0$

これが求める円の方程式である。

よって　$(x+2)^2+(y+1)^2=5$　より　中心 $(-2,\ -1)$　半径 $\sqrt{5}$