数学演習（図形と方程式）注：直線の方程式は$ax+by+c=0$，円は$x^2+y^2+lx+my+n=0$の形で答えること。(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　)

1．3点 A(5, 4)，B(0, -1)，C(8, -2) について，線分 AB を 2 : 3 に内分する点を P，3 : 2 に外分する点を Q とし，△ABC の重心を G とする。

(1)　線分 PQ の中点 M の座標を求めよ。

(2)　点 G を通り，直線ＡＢに垂直な直線を求めよ。

2．４点$A(2,-2)$，$B(-1,2)$，$C(3,3)$，Dが平行四辺形の４頂点となるとき，点Dの座標を求めよ。

3．３点$A(4,0)$，$B(0,2)$，Cについて，△ＡＢＣが正三角形になるとき，点Ｃの座標を求めよ。

4．点 A(1, 1) を通り，y 軸に接し，中心が直線 $y=2x$ 上にある円の方程式を求めよ。

5．２直線$x+2y-3=0$ …①，$3x-y-2=0$ … ②について，以下の問いに答えよ。

(1) 直線①に関して，点$P(0,-2)$と対称な点Ｑの座標を求めよ。

(2) 直線①に関して，直線②と対称な直線の方程式を求めよ。

6．xy 平面上に 2 点 A(3, 2)，B(8, 9) がある。点 P が直線 ℓ ：$y=x-3$ 上を動くとき，AP＋PB の最小値を求めよ。

７．２点$A(0\,,\,-2)\,,B(4\,,0)$と放物線 $y=x^2$ 上を動く点Ｐがある。△ＰＡＢの面積の最小値とそのときの点Ｐの座標を求めよ。

８．(1) 円$x^2+y^2-2x-6y-15=0$上の点（５，６）上における接線の方程式を求めよ。

(2)円$x^2+y^2+2x-6y-26=0$上の点における接線で，点Ｐ（８，１）を通るものの方程式を求めよ。

９．直線$kx-y-k=0$ … ①と円$x^2+y^2-2x-6y+8=0$ … ②について，

(1) 直線①はkがどんな値であったとしても通る点がある。この点の座標を求めよ。

(2) 直線①と円②の共有点の個数を求めよ。

10．２円$x^2+y^2+2x-4y-12=0$ … ①，$x^2+y^2-4x+2y-6=0$ … ②について，２円の交点をＡ，Ｂとする。

(1) 直線ＡＢの方程式を求めよ。

(2) ３点Ｏ，Ａ，Ｂを通る円の中心の座標と半径を求めよ。

(3) 円①上を点Ｐが動くとき，△ＰＡＢの面積の最大値を求めよ。

数学演習（図形と方程式）注：直線の方程式は$ax+by+c=0$，円は$x^2+y^2+lx+my+n=0$の形で答えること。（　）組（　）番　名前（ こたえ ）

1． 3点A(5, 4), B(0, −1), C(8, −2)について，線分ABを2：3に内分する点をP，3：2に外分する点をQとし，△ABCの重心をGとする。
(1) 線分PQの中点Mの座標を求めよ。
(2) 点Gを通り，直線ABに垂直な直線を求めよ。

(1) $P\left(\frac{3\cdot5+2\cdot0}{2+3}, \frac{3\cdot4+2(-1)}{2+3}\right)$ より $P(3,2)$

$Q\left(\frac{2\cdot5+(-3)\cdot0}{-3+2}, \frac{2\cdot4+(-3)(-1)}{-3+2}\right)$ より $Q(-10,-11)$

∴ $M\left(\frac{3-10}{2}, \frac{2-11}{2}\right)$ より $M\left(-\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

④

(2) $G\left(\frac{5+0+8}{3}, \frac{4+(-1)+(-2)}{3}\right)$ より $G\left(\frac{13}{3}, \frac{1}{3}\right)$

また、直線AB：$y-(-1)=\frac{4-(-1)}{5-0}(x-0)$

∴ $y=x-1$ より 傾き 1

求める直線の傾きをmとして $1\times m=-1$ ∴ $m=-1$

ゆえに $y-\frac{1}{3}=(-1)\cdot\left(x-\frac{13}{3}\right)$ ∴ $3x+3y-14=0$

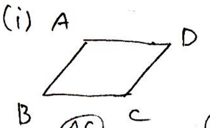
④

2． 4点$A(2,-2)$, $B(-1,2)$, $C(3,3)$, Dが平行四辺形の4頂点となるとき，点Dの座標を求めよ。

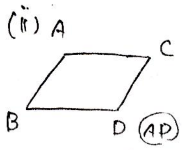
対角線の中点が一致する。

D(a, b) とおくと

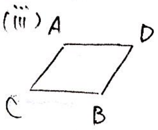
(i)



(ii)



(iii)



(i) AC, BD

$\left(\frac{2+3}{2}, \frac{-2+3}{2}\right)=\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$

∴ $a=6$, $b=-1$

(ii) AD, BC

$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{-2+b}{2}\right)=\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$

∴ $a=0$, $b=7$

(iii) AB, CD

$\left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{-2+2}{2}\right)=\left(\frac{3+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$

∴ $a=-2$, $b=-3$

⑧

以上より $D(6,-1), (0,7), (-2,-3)$

3． 3点$A(4,0)$, $B(0,2)$, Cについて，△ABCが正三角形になるとき，点Cの座標を求めよ。

AB = BC = CA が成り立つ。

C(a, b) とおくと。

$AB^2=BC^2=CA^2$ より

$(4-0)^2+(0-2)^2=(a-0)^2+(b-2)^2$
$=(a-4)^2+(b-0)^2$

∴
$$\begin{cases} a^2+(b-2)^2=20 \cdots ① \\ (a-4)^2+b^2=20 \cdots ② \end{cases}$$

①−②より $2a-b-3=0$.

∴ $b=2a-3 \cdots ③$

を①に代入して

$a^2+(2a-3-2)^2=20$

整理して $a^2-4a+1=0$

∴ $a=2\pm\sqrt{3}$

③より $b=2(2\pm\sqrt{3})-3$
$=4\pm2\sqrt{3}-3=1\pm2\sqrt{3}$

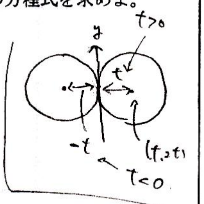
∴ $C(2\pm\sqrt{3}, 1\pm2\sqrt{3})$（複号同順）

⑧

4． 点A(1, 1)を通り，y軸に接し，中心が直線$y=2x$上にある円の方程式を求めよ。

中心が $y=2x$ より $(t, 2t)$ とおける

また、半径は y軸に接するので $|t|$ とおける



よって円の方程式は

$(x-t)^2+(y-2t)^2=|t|^2$

つまり $(x-t)^2+(y-2t)^2=t^2$ とおける。

これが (1, 1) を通るので

$(1-t)^2+(1-2t)^2=t^2$

整理して $2t^2-3t+1=0$

$(2t-1)(t-1)=0$

∴ $t=\frac{1}{2}, 1$

・$t=1$の時

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

∴ $x^2+y^2-2x-4y+4=0$

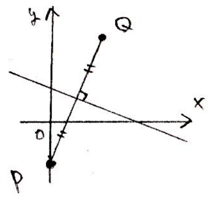
・$t=\frac{1}{2}$の時

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$

∴ $x^2+y^2-x-2y+1=0$

⑧

5． 2直線$x+2y-3=0$…①，$3x-y-2=0$…②について，以下の問いに答えよ。
(1) 直線①に関して，点$P(0,-2)$と対称な点Qの座標を求めよ。
(2) 直線①に関して，直線②と対称な直線の方程式を求めよ。



(1) 直線①：$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

Q(a, b) とおくと

・PQ ⊥ 直線① より $\frac{b-(-2)}{a-0}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

整理して

$b+2=2a \cdots (i)$

・PQの中点は①上

中点 $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$ より

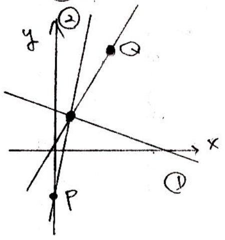
$\frac{a+0}{2}+2\times\frac{b-2}{2}-3=0$, 整理して $a+2(b-2)-6=0 \cdots (ii)$

(i)(ii)より $a=\frac{14}{5}$, $b=\frac{18}{5}$

∴ $Q\left(\frac{14}{5}, \frac{18}{5}\right)$ ④

(2) 求める直線は

直線①と直線②の交点と点Qを通る直線である



①と②を通る直線は

$x+2y-3+k(3x-y-2)=0$

とおける。これが $Q\left(\frac{14}{5}, \frac{18}{5}\right)$ を通るので

$\frac{14}{5}+2\cdot\frac{18}{5}-3+k\left(3\cdot\frac{14}{5}-\frac{18}{5}-2\right)=0$

∴ $k=-\frac{5}{2}$

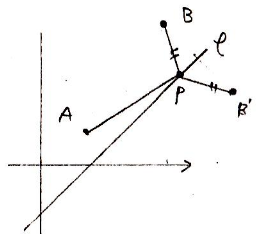
ゆえに

$x+2y-3-\frac{5}{2}(3x-y-2)=0$

∴

$13x-9y-4=0$ ⑧

6． xy平面上に2点A(3, 2), B(8, 9)がある。点Pが直線ℓ：$y=x-3$上を動くとき，AP+PBの最小値を求めよ。



ℓに関して、点Bと対称な点をB'とする。

すると PB = PB' が成り立つので

AP+PBはAP+PB'と同じ長さになる。

AP+PB'の最小値は、

AからB'までの最短経路を求める

事に等しく、それはAからB'まで真っすぐ行く場合である。

つまり、AP+PB'の最小値は、3点A, P, B'が

一直線に並ぶ場合である。

B'の座標を求めると

ℓ：$y=x-3$, B(8, 9) より B'(a, b) とおくと

BB' ⊥ ℓ ⇒ $\frac{b-9}{a-8}\times1=-1 \cdots (i)$

BB'の中点がℓ上 ⇒ $\frac{9+b}{2}=\frac{8+a}{2}-3 \cdots (ii)$

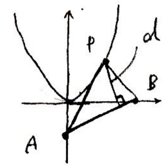
(i)(ii)より $a=12$, $b=5$ より B'(12, 5)

よって AP+PBの最小値は

$AB'=\sqrt{(12-3)^2+(5-2)^2}$
$=\sqrt{9^2+3^2}=3\sqrt{10}$

⑧

7．2点$A(0,-2)$, $B(4,0)$と放物線$y=x^2$上を動く点Pがある。△PABの面積の最小値とそのときの点Pの座標を求めよ。



$AB=\sqrt{(0-4)^2+(-2-0)^2}=2\sqrt{5}$.

点Pは$y=x^2$上の点より

$P(t, t^2)$とおける.

直線ABの方程式が

$x-2y-4=0$

より △PABについて.

ABを底辺としてみると

底辺は$2\sqrt{5}$で一定なので

高さdが最大となった時

面積も最大となる.

dは点Pと直線ABとの

距離より

$$d=\frac{|t-2t^2-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}|-2t^2+t-4|$$

ここで

$-2t^2+t-4$

$=-2(t^2-\frac{1}{2}t)-4$

$=-2\{(t-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16}\}-4$

$=-2(t-\frac{1}{4})^2-\frac{31}{8}$

より，どんなtについても

負の数となるので

$d=\frac{1}{\sqrt{5}}\{2(t-\frac{1}{4})^2+\frac{31}{8}\}$

$=\frac{2}{\sqrt{5}}(t-\frac{1}{4})^2+\frac{31}{8\sqrt{5}}$

となる。ゆえに dは

$t=\frac{1}{4}$の時，最小値 $\frac{31}{8\sqrt{5}}$

をとるので.

この時の

点Pの座標

$(\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$

また

$\triangle PAB=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot d$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{31}{8\sqrt{5}}$

$=\frac{31}{8}$

∴

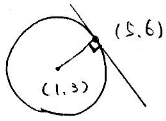
最小値 $\frac{31}{8}$

点$P(\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$

8

8．(1) 円$x^2+y^2-2x-6y-15=0$上の点（5，6）上における接線の方程式を求めよ。

(2)円$x^2+y^2+2x-6y-26=0$上の点における接線で，点P（8，1）を通るものの方程式を求めよ。



(1) $(x-1)^2+(y-3)^2=25$

より，中心 $(1,3)$ 半径5

求める直線の傾きをmとすると

$\frac{6-3}{5-1}\times m=-1$　　∴ $m=-\frac{4}{3}$

よって $y-6=-\frac{4}{3}(x-5)$

∴ $4x+3y-38=0$

4

(2) $(x+1)^2+(y-3)^2=36$

より中心$(-1,3)$ 半径6

求める直線の方程式は $y-1=m(x-8)$ とおける

∴ $mx-y-8m+1=0$

ここで，中心と上式との距離dは

$$d=\frac{|m\cdot(-1)-3-8m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|-9m-2|}{\sqrt{m^2+1}}$$

接するので $d=r$ より

$$\frac{|-9m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=6$$

両辺2乗して

$$\frac{(-9m-2)^2}{m^2+1}=36$$

$(-9m-2)^2=36(m^2+1)$

整理して

$45m^2+36m-32=0$

$(3m+4)(15m-8)=0$

∴ $m=-\frac{4}{3}, \frac{8}{15}$

・$m=-\frac{4}{3}$の時

$y-1=-\frac{4}{3}(x-8)$

∴ $4x+3y-35=0$

・$m=\frac{8}{15}$の時

$y-1=\frac{8}{15}(x-8)$

∴ $8x-15y-49=0$

∴ $4x+3y-35=0$

$8x-15y-49=0$

8

9．直線$kx-y-k=0$…①と円$x^2+y^2-2x-6y+8=0$…②について，

(1) 直線①はkがどんな値であったとしても通る点がある。この点の座標を求めよ。

(2) 直線①と円②の共有点の個数を求めよ。

(1) $k(x-1)-y=0$ とし，この式をkの恒等式とてみると

$x-1=0$, $y=0$　　∴ $(1,0)$

4

(2) 円 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$

より 中心$(1,3)$，半径$\sqrt{2}$

中心と直線①との距離dは

$$d=\frac{|k\cdot 1-3-k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}$$

・異なる2つの共有点持つとき

$d<r \iff \frac{3}{\sqrt{k^2+1}}<\sqrt{2}$

$\iff \frac{9}{k^2+1}<2$

$\iff 2(k^2+1)>9$

$\iff 2k^2-7>0$

$\iff k<-\sqrt{\frac{7}{2}}, k>\sqrt{\frac{7}{2}}$

・接する $\iff d=r \iff k=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$

・共有点なし

$\iff d>r$

$\iff -\sqrt{\frac{7}{2}}<k<\sqrt{\frac{7}{2}}$

以上より

8

$k<-\sqrt{\frac{7}{2}}, k>\sqrt{\frac{7}{2}}$ … 2個

$k=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ …… 1個

$-\sqrt{\frac{7}{2}}<k<\sqrt{\frac{7}{2}}$ … 0個

10．2円$x^2+y^2+2x-4y-12=0$…①，$x^2+y^2-4x+2y\cancel{=0}$ -6…②について，2円の交点をA，Bとする。

(1) 直線ABの方程式を求めよ。

(2) 3点O，A，Bを通る円の中心の座標と半径を求めよ。

(3) 円①上を点Pが動くとき，△PABの面積の最大値を求めよ。

(1) $x^2+y^2+2x-4y-12+k(x^2+y^2-4x+2y-6)=0$

として，$k=-1$とすると得られる

∴ $2x-4y-12-(-4x+2y-6)=0$

∴

$x-y-1=0$

4

(2) $x^2+y^2+2x-4y-12+k(x^2+y^2-4x+2y-6)=0$.

$k\neq-1$ならば，この式は2点A，Bを通る円を表す

そして，この円は原点を通るので

$-12+k(-6)=0$　　∴ $k=-2$ ($k\neq-1$を満たす)

∴ $x^2+y^2+2x-4y-12-2(x^2+y^2-4x+2y-6)=0$

∴ $x^2+y^2-10x+8y=0 \rightarrow (x-5)^2+(y+4)^2=41$

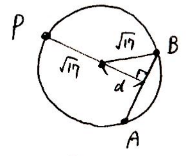
中心$(5,-4)$ 半径$\sqrt{41}$

4

(3) 円①は

$(x+1)^2+(y-2)^2=17$

∴中心 $(-1,2)$，半径$\sqrt{17}$



弦ABの長さは，

中心と直線ABとの距離dは

(1)より AB：$x-y-1=0$ より　$d=\frac{|-1-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

ゆえに三平方の定理から

$(\frac{AB}{2})^2+d^2=r^2$

$(\frac{AB}{2})^2=r^2-d^2=(\sqrt{17})^2-(2\sqrt{2})^2=17-8=9$

∴ $\frac{AB}{2}=3$ $(AB>0)$ より $AB=6$

また，△PABの最大値は

上図の位置にPがきたときで

底辺をABとすると高さは$r+d=\sqrt{17}+2\sqrt{2}$

8

∴

最大値 $\frac{1}{2}\cdot AB(r+d)$

$=3(\sqrt{17}+2\sqrt{2})$