数学演習（図形と方程式）Ｈ２３．２．２４　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

１．直線$3x+2y-6=0$について，点(3, 1)と対称な点の座標を求めよ。

２．次の３点を通る円の方程式を求めよ。$(-3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(1,\ -4)$

３．2点$(0,\ 1)$，$(2,\ 3)$を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

４．次の円と直線の共有点の個数を調べよ。　$x^2+y^2=1$，$x-ky+3=0$

５．中心が点$(-1,\ 2)$で，直線$4x+3y-12=0$に接する円の方程式を求めよ。

６．円$(x-1)^2+(y-2)^2=5$が直線$y=3x-6$から切り取る弦の長さを求めよ。また，弦の中点の座標を求めよ。

7．円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 上の点 $(5,\ 7)$ における接線の方程式を求めよ。

8．点 $(-2,\ 4)$ から円 $x^2+y^2=10$ に引いた接線の方程式と，接点の座標を求めよ。

9．2 つの円 $x^2+y^2=4$，$(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$ の交点を A，B とする。直線 AB の方程式を求めよ。

10．点 $(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2-2x+6y=0$ に引いた接線の方程式を求めよ。

11．円 $x^2+y^2-2x-4y-3=0$ と直線 $x+2y=5$ の 2 つの交点と点 A $(3,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

12．円 $(x+3)^2+y^2=9$ が直線 $y=x+k$ から切り取る弦の長さが $2\sqrt{7}$ のとき，定数 k の値を求めよ。

1．直線$3x+2y-6=0$について，点$(3,\ 1)$と対称な点の座標を求めよ。

解答　$\left(\frac{9}{13},\ -\frac{7}{13}\right)$

2点$(3,\ 1)$，$(p,\ q)$を通る直線が直線$3x+2y-6=0$に垂直であるから

$$\frac{q-1}{p-3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$$

すなわち　$2p-3q=3$　……①

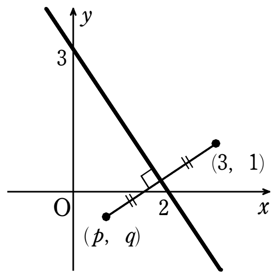
また，2点$(3,\ 1)$，$(p,\ q)$を結ぶ線分の中点が，直線$3x+2y-6=0$上にあるから

$$3\cdot\frac{3+p}{2}+2\cdot\frac{1+q}{2}-6=0$$

すなわち　$3p+2q=1$　……②

①，②を連立して解くと　$p=\frac{9}{13}$，$q=-\frac{7}{13}$

したがって，求める点の座標は　$\left(\frac{9}{13},\ -\frac{7}{13}\right)$



2．次の3点を通る円の方程式を求めよ。$(-3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(1,\ -4)$

解答　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

求める円の方程式を$x^2+y^2+lx+my+n=0$とする。

点$(-3,\ 4)$を通るから　$(-3)^2+4^2-3l+4m+n=0$

ゆえに　$3l-4m-n=25$　……①

点$(4,\ 5)$を通るから　$4^2+5^2+4l+5m+n=0$

ゆえに　$4l+5m+n=-41$　……②

点$(1,\ -4)$を通るから　$1^2+(-4)^2+l-4m+n=0$

ゆえに　$l-4m+n=-17$　……③

①，②，③を解いて　$l=-2$，$m=-2$，$n=-23$

よって　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

3．2点$(0,\ 1)$，$(2,\ 3)$を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

解答　$(x-1)^2+(y-2)^2=2$

円の中心は，与えられた2点を結ぶ線分の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{1+3}{2}\right)\quad すなわち\quad (1,\ 2)$$

半径は　$\frac{1}{2}\sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{2}$

よって　$(x-1)^2+(y-2)^2=2$

4．次の円と直線の共有点の個数を調べよ。　$x^2+y^2=1$，$x-ky+3=0$

解答　$k<-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}<k$のとき2個；$k=\pm2\sqrt{2}$のとき1個；
$-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$のとき0個

$x^2+y^2=1$　……①，$x-ky+3=0$　……②とする。

円①の中心$(0,\ 0)$と直線②の距離は　$\frac{|1\cdot0+(-k)\cdot0+3|}{\sqrt{1^2+(-k)^2}}=\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}$

また，円①の半径は　1

中心と直線の距離dと円の半径rについて

交点の個数が2個$\Leftrightarrow d<r$

交点の個数が1個$\Leftrightarrow d=r$

交点の個数が0個$\Leftrightarrow d>r$

が成り立つ。ここで，$d=\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}$，$r=1$であるから

$d<r$のとき，

$\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}<1$を解くと，両辺はともに正であるから，2乗して

$$\frac{9}{k^2+1}<1$$

ここで，k^2+1は正の数なので，両辺にk^2+1をかけても不等号の向きは変わらない。

$3^2<k^2+1$　　ゆえに　$k^2>8$

よって　$k<-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}<k$

同様にして，$d=r$　つまり　$\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}=1$を解くと　$k=\pm2\sqrt{2}$

また，$d>r$　つまり　$\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}>1$を解くと　$-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

したがって，共有点の個数は

$k<-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}<k$のとき　2個

$k=\pm2\sqrt{2}$のとき　1個

$-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$のとき　0個

別解　②から　$x=ky-3$　……③

③を①に代入して　$(ky-3)^2+y^2=1$

整理すると　$(k^2+1)y^2-6ky+8=0$

判別式は　$\frac{D}{4}=(-3k)^2-(k^2+1)\cdot8=k^2-8=(k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2})$

したがって，共有点の個数は

$D>0$　すなわち　$k<-2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}<k$のとき　2個

$D=0$　すなわち　$k=\pm2\sqrt{2}$のとき　1個

$D<0$　すなわち　$-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$のとき　0個

5．中心が点$(-1,\ 2)$で，直線$4x+3y-12=0$に接する円の方程式を求めよ。

解答　$(x+1)^2+(y-2)^2=4$

円の半径をrとすると，中心$(-1,\ 2)$と直線$4x+3y-12=0$の距離がrであるから

$$r=\frac{|4\cdot(-1)+3\cdot2-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

よって　$(x+1)^2+(y-2)^2=4$

6．円$(x-1)^2+(y-2)^2=5$が直線$y=3x-6$から切り取る弦の長さを求めよ。また，弦の中点の座標を求めよ。

解答　順に$\sqrt{10}$，$\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$　……①，$y=3x-6$　……②
とする。

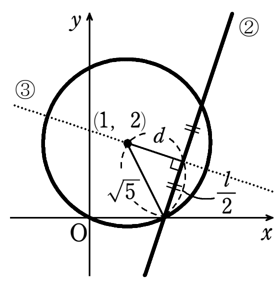
円①の中心$(1,\ 2)$と直線②の距離dは

$$d=\frac{|3\cdot1-2-6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

弦の長さをlとすると，円①の半径は$\sqrt{5}$であるから

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2=(\sqrt{5})^2-d^2=\frac{5}{2}$$

ゆえに　$l^2=10$　　よって，弦の長さは　$l=\sqrt{10}$



円①の中心$(1,\ 2)$を通り，直線②に垂直な直線の方程式は　$y-2=-\frac{1}{3}(x-1)$

すなわち　$x+3y-7=0$　……③

直線②，③の交点が，弦の中点であるから，②，③を連立して解くと　$x=\frac{5}{2}$，$y=\frac{3}{2}$

したがって，弦の中点の座標は　$\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

7．円$(x-2)^2+(y-3)^2=25$上の点$(5,\ 7)$における接線の方程式を求めよ。

解答　$3x+4y=43$

円の中心$(2,\ 3)$と点$(5,\ 7)$を通る直線の傾きは　$\frac{7-3}{5-2}=\frac{4}{3}$

求める接線は，この直線に垂直で，点$(5,\ 7)$を通るから，その方程式は

$y-7=-\frac{3}{4}(x-5)$　　すなわち　$3x+4y=43$

別解　円$(x-2)^2+(y-3)^2=25$　……①を，
中心$(2,\ 3)$が原点$(0,\ 0)$にくるように平行移動すると

円$x^2+y^2=25$　……②

になる。

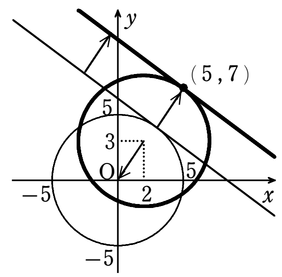
この平行移動により，円①上の点$(5,\ 7)$は点$(3,\ 4)$に移る。

点$(3,\ 4)$における円②の接線の方程式は

$3x+4y=25$　……③

求める接線は，③をx軸方向に2，y軸方向に3だけ平行移動したもので，その方程式は

$3(x-2)+4(y-3)=25$　　すなわち　$3x+4y=43$



8．点$(-2,\ 4)$から円$x^2+y^2=10$に引いた接線の方程式と，接点の座標を求めよ。

解答　$-3x+y=10$，$(-3,\ 1)$；$x+3y=10$，$(1,\ 3)$

接点を$\mathrm{P}(a,\ b)$とする。

点Pは円$x^2+y^2=10$上にあるから　$a^2+b^2=10$　……①

点Pにおける接線の方程式は　$ax+by=10$　……②

この直線が点$(-2,\ 4)$を通るから　$-2a+4b=10$

よって　$a=2b-5$　……③

③を①に代入して　$(2b-5)^2+b^2=10$

ゆえに　$b^2-4b+3=0$　　これを解いて　$b=1,\ 3$

[1]　$b=1$のとき，③から　$a=-3$

よって，接点の座標は　$(-3,\ 1)$

接線の方程式は，②から　$-3\cdot x+1\cdot y=10$　　すなわち　$-3x+y=10$

[2]　$b=3$のとき，③から　$a=1$

よって，接点の座標は　$(1,\ 3)$

接線の方程式は，②から　$1\cdot x+3\cdot y=10$　　すなわち　$x+3y=10$

9．2つの円$x^2+y^2=4$，$(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$の交点をA，Bとする。直線ABの方程式を求めよ。

解答　$x+\sqrt{3}y-2=0$

$(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$から　$x^2+y^2-2x-2\sqrt{3}y=0$

kを定数として，方程式

$$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-2x-2\sqrt{3}y)=0\quad ……①$$

を考えると，① の表す図形は 2 つの円の交点 A，B を通る。

図形 ① が直線であるとき，x^2，y^2 の項の係数が 0 となるから，① に $k=-1$ を代入して

$$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2x-2\sqrt{3}\,y)=0$$

整理して　　$x+\sqrt{3}\,y-2=0$

これが直線 AB の方程式である。

10. 点 (3，1) から円 $x^2+y^2-2x+6y=0$ に引いた接線の方程式を求めよ。

解答　$y=-3x+10$，$y=\dfrac{1}{3}x$

$x^2+y^2-2x+6y=0$ を変形すると　　$(x-1)^2+(y+3)^2=10$　…… ①

接線の方程式を　$y=m(x-3)+1$　…… ② とすると

$$mx-y-3m+1=0$$

円 ① の中心 (1，−3) と接線の距離が，円の半径 $\sqrt{10}$ に等しいから

$$\frac{|m\cdot 1-(-3)-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

分母を払って　　$|-2m+4|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$

両辺を平方して　　$(-2m+4)^2=10(m^2+1)$

整理すると　　$3m^2+8m-3=0$

ゆえに　$(m+3)(3m-1)=0$　　よって　$m=-3$，$\dfrac{1}{3}$

したがって，接線の方程式は　　$y=-3x+10$，$y=\dfrac{1}{3}x$

別解　② を ① に代入して　　$(x-1)^2+\{m(x-3)+4\}^2=10$

展開して整理すると

$$(m^2+1)x^2-2(3m^2-4m+1)x+9m^2-24m+7=0$$

円 ① と直線 ② が接するための条件は，この x についての 2 次方程式の判別式を D とすると　　$D=0$

$$\frac{D}{4}=(3m^2-4m+1)^2-(m^2+1)(9m^2-24m+7)$$

$$=(9m^4+16m^2+1-24m^3-8m+6m^2)-(9m^4-24m^3+7m^2+9m^2-24m+7)$$

$$=2(3m^2+8m-3)=2(m+3)(3m-1)$$

であるから　　$(m+3)(3m-1)=0$

よって　　$m=-3$，$\dfrac{1}{3}$

したがって，接線の方程式は　　$y=-3x+10$，$y=\dfrac{1}{3}x$

11. 円 $x^2+y^2-2x-4y-3=0$ と直線 $x+2y=5$ の 2 つの交点と点 A (3，2) を通る円の方程式を求めよ。

解答　$x^2+y^2=13$

k を定数として，方程式

$$x^2+y^2-2x-4y-3+k(x+2y-5)=0　…… ①$$

を考えると，① の表す図形は円と直線の交点を通る。

これが A (3，2) を通るとき

$$3^2+2^2-2\cdot 3-4\cdot 2-3+k(3+2\cdot 2-5)=0$$

整理して　　$2k-4=0$

よって　　$k=2$

これを ① に代入して整理すると　　$x^2+y^2=13$

これが求める円の方程式である。

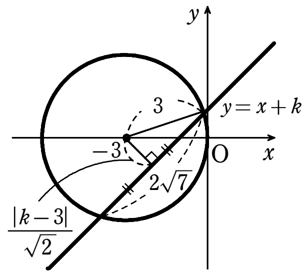
12. 円 $(x+3)^2+y^2=9$ が直線 $y=x+k$ から切り取る弦の長さが $2\sqrt{7}$ のとき，定数 k の値を求めよ。

解答　$k=1$，5

円の中心の座標は点 (−3，0)，半径は 3 である。

点 (−3，0) と直線 $y=x+k$ すなわち $x-y+k=0$

の距離は　　$\dfrac{|1\cdot(-3)-1\cdot 0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k-3|}{\sqrt{2}}$



題意の条件を満たすとき，三平方の定理から

$$\left(\frac{|k-3|}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{7}}{2}\right)^2=3^2$$

すなわち　　$\dfrac{(k-3)^2}{2}+7=9$

ゆえに　　$k-3=\pm 2$

よって　　$k=1$，5