数学演習（図形と方程式）Ｈ２０．２．２７　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．2 点 A $(-3,\ 2)$，B $(4,\ -8)$ を結ぶ線分 AB に対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　中点

(2)　3 : 1 に内分する点

(3)　2 : 3 に内分する点

(4)　3 : 1 に外分する点

(5)　2 : 3 に外分する点

２．四角形 ABCD の辺 AB，BC，CD，DA の中点を，それぞれ P，Q，R，S とするとき，等式 $\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2=2(\mathrm{PR}^2+\mathrm{QS}^2)$ が成り立つことを証明せよ。

３．2 直線 $x+ay+1=0$，$ax+(a+2)y+3=0$ が次の条件を満たすとき，定数 a の値をそれぞれ求めよ。

(1)　平行である。

(2)　垂直である。

４．k を定数とする。直線 $(k+2)x+(2k-3)y=5k-4$ は，k の値に関係なく定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ。

５．2 直線 $8x+7y-19=0$，$3x-5y+6=0$ の交点を通り，点 $(-4,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

６．平面上に 2 点 A $(-1,\ 3)$，B $(5,\ 11)$ がある。

(1)　直線 $y=2x$ について，点 A と対称な点 P の座標を求めよ。

(2)　点 Q が直線 $y=2x$ 上にあるとき，QA＋QB を最小にする点 Q の座標を求めよ。

7．次のような三角形の面積を求めよ。

(1)　3点$(-2,\ 1)$，$(2,\ -1)$，$(0,\ 4)$を頂点とする三角形

(2)　3直線$x-3y=-5$，$4x+3y=-5$，$2x-y=5$で作られる三角形

8．中心が点$(3,\ 0)$で，直線$4x-3y-2=0$に接する円の方程式を求めよ。

9．次の円が直線$4x+3y-5=0$から切り取る弦の長さと，弦の中点の座標を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=4$　　(2)　$x^2+y^2+4x-2y-1=0$

10．次の円の方程式を求めよ。

(1)　円$x^2+y^2-3x+5y-1=0$と中心が同じで，点$(1,\ 2)$を通る円

(2)　点$(1,\ -3)$に関して，円$x^2+y^2=1$と対称な円

(3)　中心がx軸上にあり，2点$(3,\ 5)$，$(-3,\ 7)$を通る円

(4)　中心が直線$y=x$上にあり，半径が$\sqrt{13}$で点$(2,\ 1)$を通る円

(5)　点$(1,\ 2)$を通り，x軸およびy軸に接する円

(6)　3直線$x-y=-1$，$x+y=3$，$x+2y=-1$で作られる三角形の外接円

数学演習（図形と方程式）Ｈ２０．２．２７解答　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．2 点 A $(-3,\ 2)$，B $(4,\ -8)$ を結ぶ線分 AB に対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　中点　　(2)　3 : 1 に内分する点

(3)　2 : 3 に内分する点　　(4)　3 : 1 に外分する点

(5)　2 : 3 に外分する点

解答　(1) $\left(\frac{1}{2},\ -3\right)$　(2) $\left(\frac{9}{4},\ -\frac{11}{2}\right)$　(3) $\left(-\frac{1}{5},\ -2\right)$　(4) $\left(\frac{15}{2},\ -13\right)$

(5) $(-17,\ 22)$

(1) $\left(\frac{-3+4}{2},\ \frac{2+(-8)}{2}\right)$　すなわち　$\left(\frac{1}{2},\ -3\right)$

(2) $\left(\frac{1\cdot(-3)+3\cdot4}{3+1},\ \frac{1\cdot2+3\cdot(-8)}{3+1}\right)$　すなわち　$\left(\frac{9}{4},\ -\frac{11}{2}\right)$

(3) $\left(\frac{3\cdot(-3)+2\cdot4}{2+3},\ \frac{3\cdot2+2\cdot(-8)}{2+3}\right)$　すなわち　$\left(-\frac{1}{5},\ -2\right)$

(4) $\left(\frac{-1\cdot(-3)+3\cdot4}{3-1},\ \frac{-1\cdot2+3\cdot(-8)}{3-1}\right)$　すなわち　$\left(\frac{15}{2},\ -13\right)$

(5) $\left(\frac{-3\cdot(-3)+2\cdot4}{2-3},\ \frac{-3\cdot2+2\cdot(-8)}{2-3}\right)$　すなわち　$(-17,\ 22)$

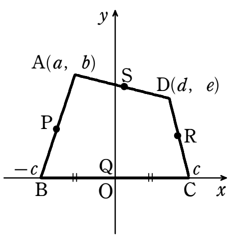
２．四角形 ABCD の辺 AB，BC，CD，DA の中点を，それぞれ P，Q，R，S とするとき，等式 $AC^2+BD^2=2(PR^2+QS^2)$ が成り立つことを証明せよ。

解答　略

直線 BC を x 軸に，点 Q を通り BC に垂直な直線を y 軸にとって，四角形 ABCD の各頂点の座標を

A $(a,\ b)$，B $(-c,\ 0)$，C $(c,\ 0)$，D $(d,\ e)$

とおく。



このとき

P $\left(\frac{a-c}{2},\ \frac{b}{2}\right)$，Q $(0,\ 0)$，

R $\left(\frac{c+d}{2},\ \frac{e}{2}\right)$，S $\left(\frac{a+d}{2},\ \frac{b+e}{2}\right)$

よって　$AC^2+BD^2=\{(c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(d+c)^2+(e-0)^2\}$

$=a^2+b^2+2c^2+d^2+e^2-2ac+2cd$

また　$2(PR^2+QS^2)=2\left[\left\{\left(\frac{c+d}{2}-\frac{a-c}{2}\right)^2+\left(\frac{e}{2}-\frac{b}{2}\right)^2\right\}+\left\{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2+\left(\frac{b+e}{2}\right)^2\right\}\right]$

$=2\left\{\frac{(2c+d-a)^2}{4}+\frac{(e-b)^2}{4}+\frac{(a+d)^2}{4}+\frac{(b+e)^2}{4}\right\}$

$=\frac{4c^2+d^2+a^2+4cd-2ad-4ac}{2}+\frac{e^2-2be+b^2}{2}$

$+\frac{a^2+2ad+d^2}{2}+\frac{b^2+2be+e^2}{2}$

$=a^2+b^2+2c^2+d^2+e^2-2ac+2cd$

したがって　$AC^2+BD^2=2(PR^2+QS^2)$

３．2 直線 $x+ay+1=0$，$ax+(a+2)y+3=0$ が次の条件を満たすとき，定数 a の値をそれぞれ求めよ。

(1)　平行である。　　(2)　垂直である。

解答　(1)　$a=-1,\ 2$　(2)　$a=0,\ -3$

(1)　平行であるための条件は　$1\cdot(a+2)-a\cdot a=0$

よって　$a^2-a-2=0$　ゆえに　$(a+1)(a-2)=0$

これを解いて　$a=-1,\ 2$

(2)　垂直であるための条件は　$1\cdot a+a(a+2)=0$

よって　$a^2+3a=0$　ゆえに　$a(a+3)=0$

これを解いて　$a=0,\ -3$

４．k を定数とする。直線 $(k+2)x+(2k-3)y=5k-4$ は，k の値に関係なく定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ。

解答　証明は略，$(1,\ 2)$

$(k+2)x+(2k-3)y=5k-4$ ……①　とおく。

① を k について整理すると　$(x+2y-5)k+(2x-3y+4)=0$

よって，$x+2y-5=0$，$2x-3y+4=0$ を同時に満たす x，y は，k の値に関係なく等式 ① を成り立たせる。

ゆえに，直線 ① は 2 直線 $x+2y-5=0$，$2x-3y+4=0$ の交点を通る。

連立方程式 $x+2y-5=0$，$2x-3y+4=0$ を解くと　$x=1$，$y=2$

したがって，直線 ① は k の値に関係なく定点 $(1,\ 2)$ を通る。

５．2 直線 $8x+7y-19=0$，$3x-5y+6=0$ の交点を通り，点 $(-4,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

解答　$4x-27y+43=0$

k を定数として，方程式

$k(8x+7y-19)+(3x-5y+6)=0$ ……①

を考えると，① は直線を表し，その直線は 2 直線 $8x+7y-19=0$，$3x-5y+6=0$ の交点を通る。

直線 ① が点 $(-4,\ 1)$ を通るとき

$k\{8(-4)+7\cdot1-19\}+3(-4)-5\cdot1+6=0$　よって　$k=-\frac{1}{4}$

この k の値を ① に代入して整理すると　$4x-27y+43=0$

６．平面上に 2 点 A $(-1,\ 3)$，B $(5,\ 11)$ がある。

(1)　直線 $y=2x$ について，点 A と対称な点 P の座標を求めよ。

(2)　点 Q が直線 $y=2x$ 上にあるとき，QA＋QB を最小にする点 Q の座標を求めよ。

解答　(1)　$(3,\ 1)$　(2)　$\left(\frac{14}{3},\ \frac{28}{3}\right)$

(1)　直線 $y=2x$ を ℓ とし，点 P の座標を $(p,\ q)$ とする。$AP\perp\ell$ であるから，$p\neq-1$ で

$\frac{q-3}{p+1}\cdot2=-1$

ゆえに　$p+2q=5$ ……①

また，線分 AP の中点 $\left(\frac{p-1}{2},\ \frac{q+3}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから　$\frac{q+3}{2}=2\cdot\frac{p-1}{2}$

ゆえに　$2p-q=5$ ……②

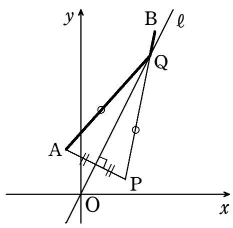
①，② を解いて　$p=3$，$q=1$

よって，点 P の座標は　$(3,\ 1)$

(2)　右の図のように，2 点 A，B は，直線 ℓ に関して同じ側にある。

ここで　$QA+QB=QP+QB\geqq PB$

であるから，3 点 P，Q，B が 1 つの直線上にあるとき，QA＋QB は最小になる。



また，直線 PB の方程式は　$y-1=\frac{11-1}{5-3}(x-3)$

すなわち　$y=5x-14$ ……③

③ と $y=2x$ を連立して解くと　$x=\frac{14}{3}$，$y=\frac{28}{3}$

よって，求める点 Q の座標は　$\left(\frac{14}{3},\ \frac{28}{3}\right)$

７．次のような三角形の面積を求めよ。

(1)　3 点 $(-2,\ 1)$，$(2,\ -1)$，$(0,\ 4)$ を頂点とする三角形

(2)　3 直線 $x-3y=-5$，$4x+3y=-5$，$2x-y=5$ で作られる三角形

解答　(1)　8　(2)　15

(1)　A $(-2,\ 1)$，B $(2,\ -1)$，C $(0,\ 4)$ とおく。

直線 BC の方程式は

$y+1=\frac{4+1}{0-2}(x-2)$　すなわち　$5x+2y-8=0$

点 A と直線 BC の距離 d は　$d=\frac{|5(-2)+2\cdot1-8|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\frac{16}{\sqrt{29}}$

また　$BC=\sqrt{(0-2)^2+(4+1)^2}=\sqrt{29}$

よって，求める面積は　$\frac{1}{2}BC\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{16}{\sqrt{29}}=8$

(2)　$x-3y=-5$ ……①，$4x+3y=-5$ ……②，$2x-y=5$ ……③ とする。

また，2 直線 ①，② の交点を A，2 直線 ②，③ の交点を B，

2 直線 ③，① の交点を C　とする。

①，② を連立して解くと　$x=-2$，$y=1$　よって　A$(-2,\ 1)$

同様にして　B$(1,\ -3)$，C$(4,\ 3)$

点 A と直線 BC，すなわち 直線 ③ との距離 d は　$d=\frac{|2(-2)-1-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}$

また　$BC=\sqrt{(4-1)^2+(3+3)^2}=3\sqrt{5}$

よって，求める面積は　$\frac{1}{2}BC\cdot d=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{5}\cdot\frac{10}{\sqrt{5}}=15$

8．中心が点 $(3,\ 0)$ で，直線 $4x-3y-2=0$ に接する円の方程式を求めよ。

解答　$(x-3)^2+y^2=4$

求める円の半径を r とする。

r は円の中心 $(3,\ 0)$ と直線 $4x-3y-2=0$ の距離に等しいから

$$r=\frac{|4\cdot 3-3\cdot 0-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$$

よって，求める円の方程式は　$(x-3)^2+y^2=4$

9．次の円が直線 $4x+3y-5=0$ から切り取る弦の長さと，弦の中点の座標を求めよ。

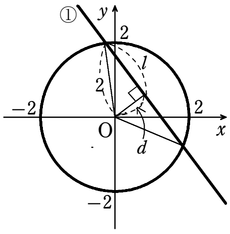
(1)　$x^2+y^2=4$　　(2)　$x^2+y^2+4x-2y-1=0$

解答　(1)　$2\sqrt{3}$，$\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$　(2)　$2\sqrt{2}$，$\left(-\frac{2}{5},\ \frac{11}{5}\right)$

$4x+3y-5=0$ …… ① とおく。

(1)　円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ① の距離を d とすると

$$d=\frac{|-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$$



円の半径は 2 であるから，弦の長さを $2l$ とすると

$$l^2=2^2-d^2=4-1=3$$

$l>0$ であるから　$l=\sqrt{3}$

よって，弦の長さは　$2l=2\sqrt{3}$

円の中心 $(0,\ 0)$ を通り，直線 ① に垂直な直線の方程式は　$y=\frac{3}{4}x$　すなわち　$3x-4y=0$ …… ②

2 直線 ①，② の交点が弦の中点である。

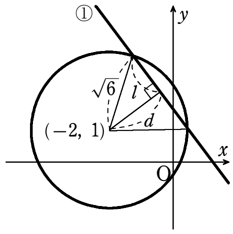
①，② を連立して解くと　$x=\frac{4}{5}$，$y=\frac{3}{5}$

よって，弦の中点の座標は　$\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$

(2)　円の方程式を変形すると　$(x+2)^2+(y-1)^2=6$

円の中心 $(-2,\ 1)$ と直線 ① の距離を d とすると

$$d=\frac{|4(-2)+3\cdot 1-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$



円の半径は $\sqrt{6}$ であるから，弦の長さを $2l$ とすると

$$l^2=(\sqrt{6})^2-d^2=6-4=2$$

$l>0$ であるから　$l=\sqrt{2}$

よって，弦の長さは　$2l=2\sqrt{2}$

円の中心 $(-2,\ 1)$ を通り，直線 ① に垂直な直線の方程式は

$$y-1=\frac{3}{4}(x+2)\quad すなわち\quad 3x-4y+10=0 \ \cdots\cdots ③$$

2 直線 ①，③ の交点が弦の中点である。

①，③ を連立して解くと　$x=-\frac{2}{5}$，$y=\frac{11}{5}$

よって，弦の中点の座標は　$\left(-\frac{2}{5},\ \frac{11}{5}\right)$

10．次の円の方程式を求めよ。

(1)　円 $x^2+y^2-3x+5y-1=0$ と中心が同じで，点 $(1,\ 2)$ を通る円

(2)　点 $(1,\ -3)$ に関して，円 $x^2+y^2=1$ と対称な円

(3)　中心が x 軸上にあり，2 点 $(3,\ 5)$，$(-3,\ 7)$ を通る円

(4)　中心が直線 $y=x$ 上にあり，半径が $\sqrt{13}$ で点 $(2,\ 1)$ を通る円

(5)　点 $(1,\ 2)$ を通り，x 軸および y 軸に接する円

(6)　3 直線 $x-y=-1$，$x+y=3$，$x+2y=-1$ で作られる三角形の外接円

解答　(1)　$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{41}{2}$　(2)　$(x-2)^2+(y+6)^2=1$

(3)　$(x+2)^2+y^2=50$　(4)　$(x+1)^2+(y+1)^2=13$，$(x-4)^2+(y-4)^2=13$

(5)　$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$(x-5)^2+(y-5)^2=25$

(6)　$x^2+y^2-6x+4y-7=0$

(1)　$x^2+y^2-3x+5y-1=0$ を変形すると　$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{19}{2}$

よって，求める円の方程式は　$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=r^2$　とおける。

これが点 $(1,\ 2)$ を通るから

$$\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\left(2+\frac{5}{2}\right)^2=r^2\quad ゆえに\quad r^2=\frac{41}{2}$$

したがって，求める円の方程式は　$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{41}{2}$

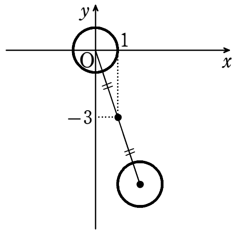
別解　求める円の方程式は　$x^2+y^2-3x+5y+n=0$　とおける。

これが点 $(1,\ 2)$ を通るから

$$1^2+2^2-3\cdot 1+5\cdot 2+n=0\quad よって\quad n=-12$$

したがって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-3x+5y-12=0$

(2)　点 $(1,\ -3)$ に関して，円 $x^2+y^2=1$ の中心 $(0,\ 0)$ と対称な点の座標を $(p,\ q)$ とすると



$$\frac{p}{2}=1,\ \frac{q}{2}=-3$$

よって　$p=2$，$q=-6$

求める円は，中心 $(p,\ q)$，半径 1 の円であるから，その方程式は

$$(x-2)^2+(y+6)^2=1$$

(3)　中心が x 軸上にあるから，求める円の方程式は　$(x-a)^2+y^2=r^2$　とおける。

これが 2 点 $(3,\ 5)$，$(-3,\ 7)$ を通るから　$(3-a)^2+25=r^2$，$(-3-a)^2+49=r^2$

この 2 式から r^2 を消去して　$(3-a)^2+25=(-3-a)^2+49$

よって　$a=-2$　このとき　$r^2=50$

したがって，求める円の方程式は　$(x+2)^2+y^2=50$

(4)　中心が直線 $y=x$ 上にあり，半径が $\sqrt{13}$ であるから，求める円の方程式は

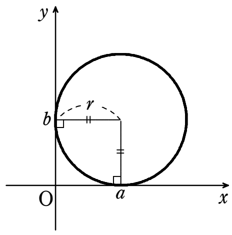
$$(x-a)^2+(y-a)^2=13$$

とおける。これが点 $(2,\ 1)$ を通るから　$(2-a)^2+(1-a)^2=13$

よって　$a^2-3a-4=0$　これを解いて　$a=-1,\ 4$

したがって，求める円の方程式は　$(x+1)^2+(y+1)^2=13$，$(x-4)^2+(y-4)^2=13$

(5)　x 軸，y 軸に接し，点 $(1,\ 2)$ を通るから，円の中心は第 1 象限にある。



円の中心の座標を $(a,\ b)$，半径を r とすると，$a>0$，$b>0$ で　$a=b=r$

よって，円の方程式は　$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

これが点 $(1,\ 2)$ を通るから

$$(1-r)^2+(2-r)^2=r^2$$

ゆえに　$r^2-6r+5=0$

これを解いて　$r=1,\ 5$

したがって，求める円の方程式は　$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$(x-5)^2+(y-5)^2=25$

(6)　$x-y=-1$ …… ①，$x+y=3$ …… ②，$x+2y=-1$ …… ③ とする。

2 直線 ①，② の交点の座標は　$(1,\ 2)$

2 直線 ②，③ の交点の座標は　$(7,\ -4)$

2 直線 ③，① の交点の座標は　$(-1,\ 0)$

求める外接円の方程式を　$x^2+y^2+lx+my+n=0$　とする。

これが上で求めた 3 点を通るから

$$1^2+2^2+l\cdot 1+m\cdot 2+n=0,\quad 7^2+(-4)^2+l\cdot 7+m\cdot(-4)+n=0,$$

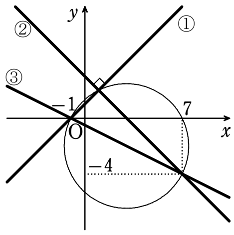
$$(-1)^2+0^2+l\cdot(-1)+m\cdot 0+n=0$$

よって　$l+2m+n=-5$，$7l-4m+n=-65$，$-l+n=-1$

これを解いて　$l=-6$，$m=4$，$n=-7$

ゆえに，求める円の方程式は　$x^2+y^2-6x+4y-7=0$

別解　2 直線 ①，② の傾きは，それぞれ 1，-1 であるから，これらは垂直である。



また，2 直線 ①，③ の交点は　$(-1,\ 0)$

2 直線 ②，③ の交点は　$(7,\ -4)$

よって，求める外接円は，2 点 $(-1,\ 0)$，$(7,\ -4)$ を直径の両端とする円である。

円の中心は，2 点 $(-1,\ 0)$，$(7,\ -4)$ を結ぶ線分の中点である。その座標は

$$\left(\frac{-1+7}{2},\ \frac{0-4}{2}\right)\quad すなわち\quad (3,\ -2)$$

半径は　$\frac{1}{2}\sqrt{(7+1)^2+(-4-0)^2}=2\sqrt{5}$

ゆえに，求める円の方程式は　$(x-3)^2+(y+2)^2=20$