数学演習（図形と方程式）Ｈ２２．５．１　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．A$(-2,\ 1)$，B$(6,\ -3)$，C$(1,\ 7)$ とするとき，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 BC を $3:2$ に内分する点 P

(2)　線分 CA を $3:2$ に外分する点 Q

(3)　線分 AB の中点 R

(4)　△PQR の重心 G

2．(1)　次の 2 点間の距離を求めよ。

(ア)　$(2,\ 3)$，$(4,\ -3)$　　　　(イ)　$(0,\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 7)$

(2)　2 点 A$(1,\ -3)$，B$(-2,\ y)$ 間の距離が $\sqrt{13}$ であるとき，$y$ の値を求めよ。

(3)　2 点 A$(-1,\ 2)$，B$(3,\ 4)$ から等距離にある $x$ 軸上の点 P の座標を求めよ。

3．次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(2,\ 3)$ を通り，直線 $3x+2y+1=0$ に平行な直線

(2)　点 $(-2,\ -3)$ を通り，直線 $2x+3y=4$ に垂直な直線

(3)　2 点 $(1,\ 2)$，$(4,\ -2)$ を結ぶ線分の垂直二等分線

4．直線 $2x+y+1=0$ を $\ell$ とする。直線 $\ell$ に関して点P$(-3,\ 1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

5．3 点 A$(1,\ 1)$，B$(3,\ 5)$，C$(5,\ 2)$ について，次のものを求めよ。

(1)　直線 BC の方程式　　　　(2)　線分 BC の長さ

(3)　点 A と直線 BC の距離　　　　(4)　△ABC の面積

6．次のような円の方程式を求めよ。

(1)　中心が点 $(2,\ -3)$，半径が 1 の円

(2)　中心が点 $(3,\ 4)$ で，原点を通る円

(3)　2 点 $(3,\ 1)$，$(-5,\ 7)$ を直径の両端とする円

7．3 点 (1, 3)，(4, 2)，(5, $-5$) を通る円の方程式を求めよ。

8．円 $x^2+y^2=2$ ……① と直線 $y=-x+k$ ……② について

(1) 円 ① と直線 ② が共有点をもつとき，定数 $k$ の値の範囲を求めよ。

(2) 円 ① と直線 ② が接するとき，定数 $k$ の値を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

9．円 $x^2+y^2=5$ 上の点 P (1, $-2$) における接線の方程式を求めよ。

10. 点 A (3, 1) から円 $x^2+y^2=2$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

1．A$(-2,\ 1)$，B$(6,\ -3)$，C$(1,\ 7)$ とするとき，次の点の座標を求めよ。

(1) 線分 BC を $3:2$ に内分する点 P

(2) 線分 CA を $3:2$ に外分する点 Q

(3) 線分 AB の中点 R

(4) △PQR の重心 G

解答　(1) $(3,\ 3)$　(2) $(-8,\ -11)$　(3) $(2,\ -1)$　(4) $(-1,\ -3)$

解説

(1) 点 P の座標は，$\left(\dfrac{2\cdot 6+3\cdot 1}{3+2},\ \dfrac{2\cdot(-3)+3\cdot 7}{3+2}\right)$ から　$(3,\ 3)$

(2) 点 Q の座標は，$\left(\dfrac{-2\cdot 1+3\cdot(-2)}{3-2},\ \dfrac{-2\cdot 7+3\cdot 1}{3-2}\right)$ から　$(-8,\ -11)$

(3) 点 R の座標は，$\left(\dfrac{-2+6}{2},\ \dfrac{1-3}{2}\right)$ から　$(2,\ -1)$

(4) (1)～(3) の結果により，△PQR の重心 G の座標は

$$\left(\frac{3-8+2}{3},\ \frac{3-11-1}{3}\right) \text{ から}\quad (-1,\ -3)$$

2．(1) 次の 2 点間の距離を求めよ。

（ア）$(2,\ 3)$，$(4,\ -3)$　　（イ）$(0,\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 7)$

(2) 2 点 A$(1,\ -3)$，B$(-2,\ y)$ 間の距離が $\sqrt{13}$ であるとき，$y$ の値を求めよ。

(3) 2 点 A$(-1,\ 2)$，B$(3,\ 4)$ から等距離にある $x$ 軸上の点 P の座標を求めよ。

解答　(1)（ア）$2\sqrt{10}$　（イ）$2\sqrt{13}$　(2) $y=-1,\ -5$　(3) $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$

解説

(1)（ア）$\sqrt{(4-2)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

（イ）$\sqrt{(-\sqrt{3})^2+7^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

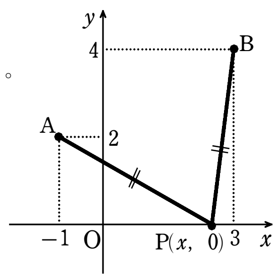
(2) $AB=\sqrt{13}$　すなわち　$AB^2=13$ から

$(-2-1)^2+\{y-(-3)\}^2=13$

ゆえに　$(y+3)^2=4$

よって　$y+3=\pm 2$

したがって　$y=-1,\ -5$




(3) 点 P は $x$ 軸上にあるから，その座標を $(x,\ 0)$ とおく。

$AP=BP$　すなわち　$AP^2=BP^2$　から

$\{x-(-1)\}^2+(0-2)^2=(x-3)^2+(0-4)^2$

ゆえに　$(x+1)^2+4=(x-3)^2+16$

整理して　$8x=20$　　よって　$x=\dfrac{5}{2}$

したがって，点 P の座標は　$\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$

3．次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(2,\ 3)$ を通り，直線 $3x+2y+1=0$ に平行な直線

(2) 点 $(-2,\ -3)$ を通り，直線 $2x+3y=4$ に垂直な直線

(3) 2 点 $(1,\ 2)$，$(4,\ -2)$ を結ぶ線分の垂直二等分線

解答　(1) $3x+2y-12=0$　(2) $3x-2y=0$　(3) $6x-8y-15=0$

解説

(1) 直線 $3x+2y+1=0$ の傾きは　$-\dfrac{3}{2}$

よって，この直線に平行な直線の傾きは $-\dfrac{3}{2}$ である。

したがって，求める直線の方程式は

$y-3=-\dfrac{3}{2}(x-2)$　すなわち　$3x+2y-12=0$

(2) 直線 $2x+3y=4$ の傾きは　$-\dfrac{2}{3}$

この直線に垂直な直線の傾きを $m$ とすると　$m\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-1$

これを解いて　$m=\dfrac{3}{2}$

したがって，求める直線の方程式は

$y-(-3)=\dfrac{3}{2}\{x-(-2)\}$　すなわち　$3x-2y=0$

3) A$(1,\ 2)$，B$(4,\ -2)$ とする。線分 AB の中点の座標は

$\left(\dfrac{1+4}{2},\ \dfrac{2-2}{2}\right)$ から　$\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$

直線 AB の傾きは　$\dfrac{-2-2}{4-1}=-\dfrac{4}{3}$

よって，線分 AB の垂直二等分線の傾きは $\dfrac{3}{4}$ であるから，求める直線の方程式は

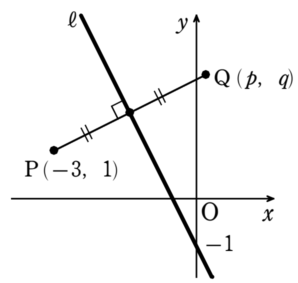
$y-0=\dfrac{3}{4}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$　すなわち　$6x-8y-15=0$

4．直線 $2x+y+1=0$ を $\ell$ とする。直線 $\ell$ に関して点P$(-3,\ 1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

解答　$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

解説

点 Q の座標を $(p,\ q)$ とする。




[1] 直線 $\ell$ の傾きは　$-2$

直線 PQ の傾きは　$\dfrac{q-1}{p+3}$

PQ ⊥ $\ell$ であるから

$\dfrac{q-1}{p+3}\cdot(-2)=-1$

ゆえに　$2(q-1)=p+3$

よって　$p-2q+5=0$　……①

[2] 線分 PQ の中点 $\left(\dfrac{-3+p}{2},\ \dfrac{1+q}{2}\right)$ が直線 $\ell$ 上にあるから

$2\cdot\dfrac{-3+p}{2}+\dfrac{1+q}{2}+1=0$

ゆえに　$2(-3+p)+1+q+2=0$

よって　$2p+q-3=0$　……②

①＋②×2 から　$5p-1=0$　　ゆえに　$p=\dfrac{1}{5}$

これを ② に代入して　$2\cdot\dfrac{1}{5}+q-3=0$　　よって　$q=\dfrac{13}{5}$

したがって，求める点 Q の座標は　$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

5．3 点 A$(1,\ 1)$，B$(3,\ 5)$，C$(5,\ 2)$ について，次のものを求めよ。

(1) 直線 BC の方程式　　(2) 線分 BC の長さ

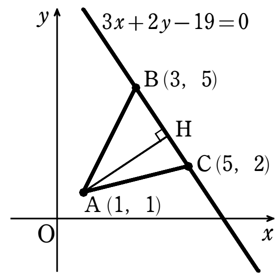
(3) 点 A と直線 BC の距離　　(4) △ABC の面積

解答　(1) $3x+2y-19=0$　(2) $\sqrt{13}$　(3) $\dfrac{14}{\sqrt{13}}$　(4) 7

解説

(1) 2 点 B$(3,\ 5)$，C$(5,\ 2)$ を通る直線 BC の方程式は

$y-5=\dfrac{2-5}{5-3}(x-3)$　すなわち　$3x+2y-19=0$




(2) $BC=\sqrt{(5-3)^2+(2-5)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

(3) 点 A と直線 BC の距離，すなわち，点 A から BC に下ろした垂線 AH の長さは

$AH=\dfrac{|3\cdot 1+2\cdot 1-19|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{14}{\sqrt{13}}$

(4) (2)，(3) から

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot AH=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\dfrac{14}{\sqrt{13}}=7$

6．次のような円の方程式を求めよ。

(1) 中心が点 $(2,\ -3)$，半径が 1 の円

(2) 中心が点 $(3,\ 4)$ で，原点を通る円

(3) 2 点 $(3,\ 1)$，$(-5,\ 7)$ を直径の両端とする円

解答　(1) $(x-2)^2+(y+3)^2=1$　(2) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

(3) $(x+1)^2+(y-4)^2=25$

解説

(1) $(x-2)^2+\{y-(-3)\}^2=1^2$

すなわち　$(x-2)^2+(y+3)^2=1$

(2) この円の半径 $r$ は，中心 $(3,\ 4)$ と原点の距離で

$r=\sqrt{3^2+4^2}=5$

よって，求める円の方程式は

$(x-3)^2+(y-4)^2=25$

(3) この円の中心は 2 点 $(3,\ 1)$，$(-5,\ 7)$ を結ぶ線分の中点で

$\left(\dfrac{3-5}{2},\ \dfrac{1+7}{2}\right)$　すなわち　$(-1,\ 4)$

半径 $r$ は中心 $(-1,\ 4)$ と点 $(3,\ 1)$ との距離で

$r=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(1-4)^2}=5$

よって，求める円の方程式は

$\{x-(-1)\}^2+(y-4)^2=25$

すなわち　$(x+1)^2+(y-4)^2=25$

7．3 点 $(1,\ 3)$，$(4,\ 2)$，$(5,\ -5)$ を通る円の方程式を求めよ。

解答　$x^2+y^2-2x+4y-20=0$

解説

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。

3 点 $(1,\ 3)$，$(4,\ 2)$，$(5,\ -5)$ を通るから

$l+3m+n+10=0$　……①

$4l+2m+n+20=0$　……②

$5l-5m+n+50=0$　……③

②－① から　$3l-m+10=0$　……④

③－② から　$l-7m+30=0$　……⑤

④×7－⑤ から　$20l+40=0$　　よって　$l=-2$

④ から　$m=4$　　① から　$n=-20$

よって　$x^2+y^2-2x+4y-20=0$

8．円 $x^2+y^2=2$ ……① と直線 $y=-x+k$ ……② について

(1)　円 ① と直線 ② が共有点をもつとき，定数 $k$ の値の範囲を求めよ。

(2)　円 ① と直線 ② が接するとき，定数 $k$ の値を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

解答　(1)　$-2 \leqq k \leqq 2$

(2)　$k=2$ のとき，接点の座標は　$(1,\ 1)$；

$k=-2$ のとき，接点の座標は　$(-1,\ -1)$

解説

② を ① に代入して　　$x^2+(-x+k)^2=2$

整理すると　　$2x^2-2kx+k^2-2=0$　……[A]

判別式は　　$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-2)=-(k^2-4)=-(k+2)(k-2)$

(1)　円 ① と直線 ② が共有点をもつための条件は　　$D \geqq 0$

よって　　$-2 \leqq k \leqq 2$

(2)　円 ① と直線 ② が接するための条件は　　$D=0$

したがって　　$k=\pm 2$

$k=2$のとき，[A]に代入して $2x^2-4x+2=0$

$2(x-1)^2=0$　　　よって$x=1$

このとき，$y=-1+2=1$　　　つまり接点は$(1\ ,1)$

$k=-2$のときも同様

よって　　$k=2$　のとき，接点の座標は　$(1,\ 1)$

$k=-2$ のとき，接点の座標は　$(-1,\ -1)$

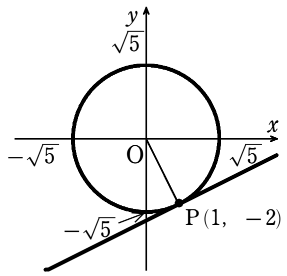
9．円 $x^2+y^2=5$ 上の点 $\mathrm{P}(1,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$x-2y=5$

解説

公式より

$1 \cdot x+(-2)y=5$　すなわち　$x-2y=5$




別解（円の接線の性質を利用）

求める接線は，点 P を通り，半径 OP に垂直な直線である。

直線 OP の傾きは　　$-2$

したがって，接線の傾きは　$\dfrac{1}{2}$

求める接線の方程式は

$y-(-2)=\dfrac{1}{2}(x-1)$　すなわち　$x-2y=5$

$y=\dfrac{1}{2}x-\left(\dfrac{1}{2}+2\right)$　すなわち　$x-2y-5=0$

10．点 $\mathrm{A}(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=2$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

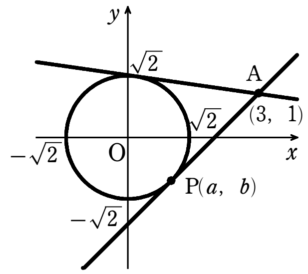
解答　接線の方程式 $x-y=2$，　接点の座標 $(1,\ -1)$；

接線の方程式 $x+7y=10$，接点の座標 $\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$

解説

接点を$\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，P は円上にあるから

$a^2+b^2=2$　……①




また，P における接線の方程式は

$ax+by=2$　……②

で，この直線が点 A を通るから

$3a+b=2$　……③

① と ③ から $b$ を消去して　　$a^2+(2-3a)^2=2$

整理すると　　$5a^2-6a+1=0$

ゆえに　　$(a-1)(5a-1)=0$

よって　　$a=1,\ \dfrac{1}{5}$

③ から　$a=1$ のとき　$b=-1$，$a=\dfrac{1}{5}$ のとき　$b=\dfrac{7}{5}$

したがって，接線の方程式 ② と接点の座標は次のようになる。

接線の方程式 $x-y=2$，　接点の座標 $(1,\ -1)$

接線の方程式 $x+7y=10$，接点の座標 $\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$