数学演習（接線の方程式･交点を通る図形）Ｈ２４．２．２０

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．次の円の，与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=25$　$(4,\ 3)$　　(2)　$x^2+y^2=5$　$(1,\ -2)$

(3)　$x^2+y^2=4$　$(-2,\ 0)$　　(4)　$x^2+y^2=9$　$(\sqrt{3},\ -\sqrt{6})$

2．円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 上の点 $(5,\ 7)$ における接線の方程式を求めよ。

3．円 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 上の点 $\mathrm{P}(4,\ 6)$ における接線の方程式を求めよ。

4．円 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ が直線 $y=3x-6$ から切り取る弦の長さを求めよ。

5．次の点から与えられた円に引いた接線の方程式と，接点の座標を求めよ。

(1)　$(4,\ 2)$　$x^2+y^2=4$　　(2)　$(-2,\ 4)$　$x^2+y^2=10$

6．点 $\mathrm{A}(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=2$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

7．点 (3，1) から円 $x^2+y^2-2x+6y=0$ に引いた接線の方程式を求めよ。

8．円 $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ に接し，傾きが 2 の直線の方程式を求めよ。

9．次の円または直線の 2 つの交点と点 A を通る円の方程式を求めよ。

(1)　$x^2+y^2-4x-2y-8=0$，$x^2+y^2=4$，A (0，0)

(2)　$x^2+y^2-2x-4y-3=0$，$x+2y=5$，A (3，2)

10. 2 つの円 $x^2+y^2-8x-4y+4=0$，$x^2+y^2=4$ の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

11. 円 C_1：$x^2+y^2=4$ 上の点 $(1,\ \sqrt{3})$ における接線を ℓ とする。

(1)　ℓ と x 軸の交点 P の座標を求めよ。

(2)　中心が (2，0) で，ℓ に接する円 C_2 の方程式を求めよ。

(3)　円 C_1 と円 C_2 の 2 つの交点と点 P を通る円の方程式を求めよ。

12. 2 つの円 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$，$x^2+y^2-6x+5=0$ の 2 つの交点と原点を通る円の方程式を求めよ。

数学演習（接線の方程式･交点を通る図形）Ｈ２４．２．２０　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．次の円の，与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1) $x^2+y^2=25$　(4, 3)　　(2) $x^2+y^2=5$　(1, -2)

(3) $x^2+y^2=4$　(-2, 0)　　(4) $x^2+y^2=9$　($\sqrt{3}$, $-\sqrt{6}$)

解答　(1) $4x+3y=25$　(2) $x-2y=5$　(3) $x=-2$　(4) $\sqrt{3}x-\sqrt{6}y=9$

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (p, q) における接線の方程式は $px+qy=r^2$

(1) $4x+3y=25$

(2) $1\cdot x+(-2)y=5$　すなわち　$x-2y=5$

(3) $-2x+0\cdot y=4$　すなわち　$x=-2$

(4) $\sqrt{3}x+(-\sqrt{6})y=9$　すなわち　$\sqrt{3}x-\sqrt{6}y=9$

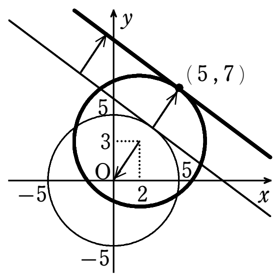
2．円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 上の点(5, 7)における接線の方程式を求めよ。

解答　$3x+4y=43$

円の中心(2, 3)と点(5, 7)を通る直線の傾きは　$\frac{7-3}{5-2}=\frac{4}{3}$

求める接線は，この直線に垂直で，点(5, 7)を通るから，その方程式は

$y-7=-\frac{3}{4}(x-5)$　すなわち　$3x+4y=43$



別解　円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ …… ① を，中心(2, 3)が原点(0, 0)にくるように平行移動すると

円 $x^2+y^2=25$ …… ②

になる。

この平行移動により，円①上の点(5, 7)は点(3, 4)に移る。

点(3, 4)における円②の接線の方程式は

$3x+4y=25$ …… ③

求める接線は，③を x 軸方向に2，y 軸方向に3だけ平行移動したもので，その方程式は

$3(x-2)+4(y-3)=25$　すなわち　$3x+4y=43$

3．円 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 上の点P(4, 6)における接線の方程式を求めよ。

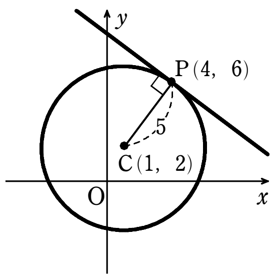
解答　$3x+4y=36$

[解法1]　円の中心をC(1, 2)とする。

求める接線は，点Pを通り，半径CPに垂直な直線である。

直線CPの傾きは $\frac{4}{3}$ であるから，求める接線の方程式は

$y-6=-\frac{3}{4}(x-4)$　すなわち　$3x+4y=36$



[解法2]　点Pにおける接線は x 軸に垂直でないから，接線の方程式は

$y-6=m(x-4)$　すなわち　$mx-y-4m+6=0$ …… ①

円の中心(1, 2)と直線①の距離が円の半径5に等しいから

$\frac{|m\cdot1-2-4m+6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5$　ゆえに　$|-3m+4|=5\sqrt{m^2+1}$

両辺を平方して　$(-3m+4)^2=25(m^2+1)$

整理すると　$(4m+3)^2=0$　よって　$m=-\frac{3}{4}$

これを①に代入して整理すると　$3x+4y=36$

[解法3]　①：$y=mx-4m+6$ を円の方程式に代入して整理すると

$(m^2+1)x^2-2(4m^2-4m+1)x+8(2m^2-4m-1)=0$

判別式 D は　$\frac{D}{4}=(4m^2-4m+1)^2-8(m^2+1)(2m^2-4m-1)$

$=16m^2+24m+9=(4m+3)^2$

直線①と円が接するための条件は　$D=0$

したがって　$(4m+3)^2=0$　よって　$m=-\frac{3}{4}$

これを①に代入して整理すると　$3x+4y=36$

4．円 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ が直線 $y=3x-6$ から切り取る弦の長さを求めよ。

解答　$\sqrt{10}$

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$ …… ①，$y=3x-6$ …… ②

とする。

円①の中心(1, 2)と直線②の距離 d は

$d=\frac{|3\cdot1-2-6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

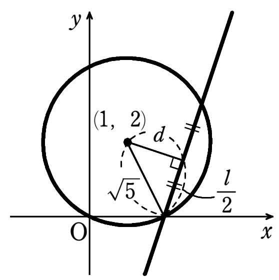
弦の長さを l とすると，円①の半径は $\sqrt{5}$ であるから

図の直角三角形より，三平方の定理から

$(\sqrt{5})^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2+d^2$　より

$\left(\frac{l}{2}\right)^2=(\sqrt{5})^2-d^2=\frac{5}{2}$

ゆえに　$l^2=10$　よって，弦の長さは　$l=\sqrt{10}$



5．次の点から与えられた円に引いた接線の方程式と，接点の座標を求めよ。

(1) (4, 2)　$x^2+y^2=4$　　(2) (-2, 4)　$x^2+y^2=10$

解答　順に　(1) $y=2$，(0, 2)；$4x-3y=10$，$\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$

(2) $-3x+y=10$，(-3, 1)；$x+3y=10$，(1, 3)

(1) 接点をP(a, b)とする。

点Pは円 $x^2+y^2=4$ 上にあるから　$a^2+b^2=4$ …… ①

点Pにおける接線の方程式は　$ax+by=4$ …… ②

この直線が点(4, 2)を通るから

$4a+2b=4$　よって　$b=2-2a$ …… ③

③を①に代入して　$a^2+(2-2a)^2=4$

ゆえに　$5a^2-8a=0$　これを解いて　$a=0, \frac{8}{5}$

[1] $a=0$ のとき，③から　$b=2$

よって，接点の座標は　(0, 2)

接線の方程式は，②から　$0\cdot x+2\cdot y=4$　すなわち　$y=2$

[2] $a=\frac{8}{5}$ のとき，③から　$b=-\frac{6}{5}$

よって，接点の座標は　$\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$

接線の方程式は，②から　$\frac{8}{5}\cdot x+\left(-\frac{6}{5}\right)\cdot y=4$

すなわち　$4x-3y=10$

(2) 接点をP(a, b)とする。

点Pは円 $x^2+y^2=10$ 上にあるから　$a^2+b^2=10$ …… ①

点Pにおける接線の方程式は　$ax+by=10$ …… ②

この直線が点(-2, 4)を通るから　$-2a+4b=10$

よって　$a=2b-5$ …… ③

③を①に代入して　$(2b-5)^2+b^2=10$

ゆえに　$b^2-4b+3=0$　これを解いて　$b=1, 3$

[1] $b=1$ のとき，③から　$a=-3$

よって，接点の座標は　(-3, 1)

接線の方程式は，②から　$-3\cdot x+1\cdot y=10$　すなわち　$-3x+y=10$

[2] $b=3$ のとき，③から　$a=1$

よって，接点の座標は　(1, 3)

接線の方程式は，②から　$1\cdot x+3\cdot y=10$　すなわち　$x+3y=10$

6．点A(3, 1)から円 $x^2+y^2=2$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

解答　接線の方程式 $x-y=2$，　接点の座標 (1, -1)；

接線の方程式 $x+7y=10$，接点の座標 $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$

接点をP(a, b)とすると，Pは円上にあるから

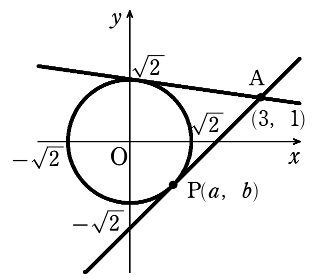
$a^2+b^2=2$ …… ①

また，Pにおける接線の方程式は

$ax+by=2$ …… ②

で，この直線が点Aを通るから

$3a+b=2$ …… ③



①と③から b を消去して　$a^2+(2-3a)^2=2$

整理すると　$5a^2-6a+1=0$

ゆえに　$(a-1)(5a-1)=0$

よって　$a=1, \frac{1}{5}$

③から　$a=1$ のとき　$b=-1$，$a=\frac{1}{5}$ のとき　$b=\frac{7}{5}$

したがって，接線の方程式②と接点の座標は次のようになる。

接線の方程式 $x-y=2$，　接点の座標 (1, -1)

接線の方程式 $x+7y=10$，接点の座標 $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$

別解　点(3, 1)を通る接線は，x 軸に垂直でないから，求める接線の方程式は，次のようにおける。

$y-1=m(x-3)$　すなわち　$y=mx-(3m-1)$ …… ①

①を円の方程式に代入して　$x^2+\{mx-(3m-1)\}^2=2$

展開して整理すると

$(m^2+1)x^2-2m(3m-1)x+(3m-1)^2-2=0$ …… ②

判別式は　$\frac{D}{4}=\{-m(3m-1)\}^2-(m^2+1)\{(3m-1)^2-2\}$

$=(3m-1)^2\{m^2-(m^2+1)\}+2(m^2+1)$

$=-(3m-1)^2+2(m^2+1)$

$=-7m^2+6m+1=-(7m^2-6m-1)$

$=-(m-1)(7m+1)$

円と直線①が接するための条件は　$D=0$

ゆえに　$(m-1)(7m+1)=0$　よって　$m=1, -\frac{1}{7}$

求めた m の値を①に代入すると

$m=1$ のとき　$y=x-2$ ……③

$m=-\dfrac{1}{7}$ のとき　$y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{10}{7}$ ……④

また，2 次方程式 ② の重解は　$x=-\dfrac{-2m(3m-1)}{2(m^2+1)}=\dfrac{m(3m-1)}{m^2+1}$

$m=1$ を代入して　$x=\dfrac{1\cdot(3\cdot1-1)}{1^2+1}=1$

$m=-\dfrac{1}{7}$ を代入して　$x=\dfrac{-\dfrac{1}{7}\left\{3\left(-\dfrac{1}{7}\right)-1\right\}}{\left(-\dfrac{1}{7}\right)^2+1}=\dfrac{1}{5}$

接点の y 座標は，$x=1$ を ③ に代入して　$y=-1$

$x=\dfrac{1}{5}$ を ④ に代入して　$y=\dfrac{7}{5}$

以上から，接線の方程式と接点の座標は，次のようになる。

接線：$x-y=2$，　接点の座標　$(1,\ -1)$

接線：$x+7y=10$，接点の座標　$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$

7．点 $(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2-2x+6y=0$ に引いた接線の方程式を求めよ。

解答　$y=-3x+10,\ y=\dfrac{1}{3}x$

$x^2+y^2-2x+6y=0$ を変形すると　$(x-1)^2+(y+3)^2=10$ ……①

この円は中心 $(1,\ -3)$，半径 $\sqrt{10}$ であるから，点 $(3,\ 1)$ から引いた接線は x 軸に垂直ではない。

接線の方程式を　$y=m(x-3)+1$ ……② とすると

$mx-y-3m+1=0$

円 ① の中心 $(1,\ -3)$ と接線の距離が，円の半径 $\sqrt{10}$ に等しいから

$$\frac{|m\cdot1-(-3)-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

分母を払って　$|-2m+4|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$

両辺を平方して　$(-2m+4)^2=10(m^2+1)$

整理すると　$3m^2+8m-3=0$

ゆえに　$(m+3)(3m-1)=0$　よって　$m=-3,\ \dfrac{1}{3}$

したがって，接線の方程式は　$y=-3x+10,\ y=\dfrac{1}{3}x$

別解　② を ① に代入して　$(x-1)^2+\{m(x-3)+4\}^2=10$

展開して整理すると

$$(m^2+1)x^2-2(3m^2-4m+1)x+9m^2-24m+7=0$$

円 ① と直線 ② が接するための条件は，この x についての 2 次方程式の判別式を D とすると　$D=0$

$$\frac{D}{4}=(3m^2-4m+1)^2-(m^2+1)(9m^2-24m+7)$$

$$=(9m^4+16m^2+1-24m^3-8m+6m^2)-(9m^4-24m^3+7m^2+9m^2-24m+7)$$

$$=2(3m^2+8m-3)=2(m+3)(3m-1)$$

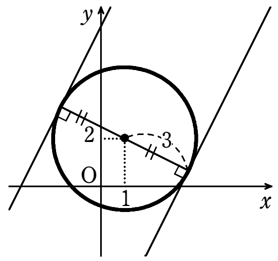
であるから　$(m+3)(3m-1)=0$

よって　$m=-3,\ \dfrac{1}{3}$

したがって，接線の方程式は　$y=-3x+10,\ y=\dfrac{1}{3}x$

8．円 $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ に接し，傾きが 2 の直線の方程式を求めよ。

解答　$y=2x\pm3\sqrt{5}$



円の方程式を変形すると

$(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$ ……①

よって，この円の中心は $(1,\ 2)$，半径は 3 である。

また，求める直線の傾きは 2 であるから，その方程式を　$y=2x+n$ ……②

すなわち　$2x-y+n=0$ とする。

直線 ② が円 ① に接するための条件は，円の中心 $(1,\ 2)$ と直線 ② の距離が円の半径 3 に等しいことである。

ゆえに　$\dfrac{|2\cdot1-2+n|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=3$　よって　$|n|=3\sqrt{5}$

したがって　$n=\pm3\sqrt{5}$

これを ② に代入して，求める直線の方程式は　$y=2x\pm3\sqrt{5}$

別解　② を ① に代入して　$(x-1)^2+(2x+n-2)^2=9$

整理すると　$5x^2+2(2n-5)x+n^2-4n-4=0$

直線 ② が円 ① に接するための条件は，この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2n-5)^2-5(n^2-4n-4)=-n^2+45=0$$

ゆえに　$n=\pm3\sqrt{5}$　よって　$y=2x\pm3\sqrt{5}$

9．次の円または直線の 2 つの交点と点 A を通る円の方程式を求めよ。

(1)　$x^2+y^2-4x-2y-8=0$，$x^2+y^2=4$，A $(0,\ 0)$

(2)　$x^2+y^2-2x-4y-3=0$，$x+2y=5$，A $(3,\ 2)$

解答　(1)　$x^2+y^2+4x+2y=0$　(2)　$x^2+y^2=13$

(1)　k を定数として，方程式

$x^2+y^2-4x-2y-8+k(x^2+y^2-4)=0$ ……①

を考えると，① の表す図形は 2 つの円の交点を通る。

これが A $(0,\ 0)$ を通るとき　$-8-4k=0$

よって　$k=-2$

これを ① に代入して整理すると　$x^2+y^2+4x+2y=0$

これが求める円の方程式である。

(2)　k を定数として，方程式

$x^2+y^2-2x-4y-3+k(x+2y-5)=0$ ……①

を考えると，① の表す図形は円と直線の交点を通る。

これが A $(3,\ 2)$ を通るとき

$3^2+2^2-2\cdot3-4\cdot2-3+k(3+2\cdot2-5)=0$

整理して　$2k-4=0$

よって　$k=2$

これを ① に代入して整理すると　$x^2+y^2=13$

これが求める円の方程式である。

10．2 つの円 $x^2+y^2-8x-4y+4=0$，$x^2+y^2=4$ の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

解答　$2x+y-2=0$

k を定数として，方程式

$x^2+y^2-8x-4y+4+k(x^2+y^2-4)=0$ ……①

を考えると，この方程式が直線を表すのは，$k=-1$ のときである。

$k=-1$ を ① に代入して　$-8x-4y+4+4=0$

式を整理して　$2x+y-2=0$

11．円 C_1：$x^2+y^2=4$ 上の点 $(1,\ \sqrt{3})$ における接線を ℓ とする。

(1)　ℓ と x 軸の交点 P の座標を求めよ。

(2)　中心が $(2,\ 0)$ で，ℓ に接する円 C_2 の方程式を求めよ。

(3)　円 C_1 と円 C_2 の 2 つの交点と点 P を通る円の方程式を求めよ。

解答　(1)　P $(4,\ 0)$　(2)　$(x-2)^2+y^2=1$　(3)　$3x^2+3y^2-16x+16=0$

(1)　ℓ の方程式は　$x+\sqrt{3}y=4$

$y=0$ を代入して　$x=4$

よって，点 P の座標は　$(4,\ 0)$

(2)　円 C_2 の半径を r とすると，中心 $(2,\ 0)$ と直線 $x+\sqrt{3}y=4$ の距離が r であるから

$$r=\frac{|1\cdot2+\sqrt{3}\cdot0-4|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=1$$

よって，円 C_2 の方程式は　$(x-2)^2+y^2=1$

(3)　k を定数として，方程式

$x^2+y^2-4+k\{(x-2)^2+y^2-1\}=0$ ……①

を考えると，① の表す図形は 2 円 C_1，C_2 の交点を通る。

これが P $(4,\ 0)$ を通るから　$4^2+0^2-4+k\{(4-2)^2+0^2-1\}=0$

整理して　$12+3k=0$

よって　$k=-4$

これを ① に代入して整理すると　$3x^2+3y^2-16x+16=0$

これが求める円の方程式である。

12．2 つの円 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$，$x^2+y^2-6x+5=0$ の 2 つの交点と原点を通る円の方程式を求めよ。

解答　$2x^2+2y^2-2x-5y=0$

k を定数として，方程式

$x^2+y^2-2x-2y+1+k(x^2+y^2-6x+5)=0$ ……①

を考えると，① の表す図形は 2 つの円の交点を通る。

これが原点を通るとき，$x=y=0$ を代入して　$1+5k=0$

したがって　$k=-\dfrac{1}{5}$

これを ① に代入して整理すると

$2x^2+2y^2-2x-5y=0$　これが求める円の方程式である。