数学演習（図形と方程式）Ｈ２３．２．２１　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．与えられた 2 点 A$(4,\ 7)$，B$(2,\ 1)$ を結ぶ線分 AB に対して，$2:3$ の比に内分，外分する点の座標を求めよ。

2．次の 3 点を頂点とする △ABC の重心の座標を求めよ。A$(-3,\ 0)$，B$(2,\ 5)$，C$(2,\ 1)$

3．2 点 A$(1,\ 4)$，B$(3,\ 1)$ から等距離にある直線 $y=2x-1$ 上の点座標を求めよ。

4．3 点 A$(1,\ -2)$，B$(-1,\ 2)$，C を頂点とする三角形が正三角形になるとき，点 C の座標を求めよ。

5．点$(3,\ 2)$を通り，2 点$(-3,\ -2)$，$(5,\ 7)$を結ぶ線分に平行な直線と垂直な直線の方程式を，それぞれ求めよ。

6．2 点 A$(1,\ 2)$，B$(4,\ 1)$ を結ぶ線分の垂直二等分線の方程式を求めよ。

7．直線$3x+2y-6=0$について，点$(3,\ 1)$と対称な点の座標を求めよ。

８. 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(4,\ 6)$，B$(8,\ 3)$ を頂点とする三角形 OABの面積を求めよ。

９. 3 直線 $x-2y+9=0$，$3x+y-1=0$，$ax-y+5=0$ が三角形を作らないとき，定数 a の値を求めよ。

10. 次の直線は，定数 k の値に関係なく定点を通る。その定点の座標を求めよ。

$$(2k+1)x+(k+4)y-k+3=0$$

11. 次の 3 点を通る円の方程式を求めよ。$(-3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(1,\ -4)$

12. 2 点 $(0,\ 1)$，$(2,\ 3)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

13. 2 点 $(-5,\ 1)$，$(2,\ 8)$ を通り，x 軸に接する円の方程式を求めよ。

数学演習（図形と方程式）Ｈ２３．２．２１　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．与えられた２点 A$(4,\ 7)$，B$(2,\ 1)$ を結ぶ線分 AB に対して，$2:3$ の比に内分，外分する点の座標を求めよ。

解答　順に $\left(\dfrac{16}{5},\ \dfrac{23}{5}\right)$，$(8,\ 19)$

内分する点の座標，外分する点の座標の順に

$$\left(\frac{3\cdot4+2\cdot2}{2+3},\ \frac{3\cdot7+2\cdot1}{2+3}\right)\quad すなわち\quad \left(\frac{16}{5},\ \frac{23}{5}\right)$$

$$\left(\frac{-3\cdot4+2\cdot2}{2-3},\ \frac{-3\cdot7+2\cdot1}{2-3}\right)\quad すなわち\quad (8,\ 19)$$

２．次の３点を頂点とする △ABC の重心の座標を求めよ。A$(-3,\ 0)$，B$(2,\ 5)$，C$(2,\ 1)$

解答　$\left(\dfrac{1}{3},\ 2\right)$

$$\left(\frac{-3+2+2}{3},\ \frac{0+5+1}{3}\right)\quad すなわち\quad \left(\frac{1}{3},\ 2\right)$$

３．２点 A$(1,\ 4)$，B$(3,\ 1)$ から等距離にある直線 $y=2x-1$ 上の点座標を求めよ。

解答　$\left(\dfrac{13}{8},\ \dfrac{9}{4}\right)$

求める点を P とすると，P は直線 $y=2x-1$ 上にあるから，その座標は $(x,\ 2x-1)$ とおくことができる。

AP＝BP から　　$AP^2=BP^2$

したがって　　$(x-1)^2+(2x-1-4)^2=(x-3)^2+(2x-1-1)^2$

$(x-1)^2+(2x-5)^2=(x-3)^2+2^2(x-1)^2$

整理して　$8x-13=0$

よって　$x=\dfrac{13}{8}$　　このとき　$2x-1=2\cdot\dfrac{13}{8}-1=\dfrac{9}{4}$

ゆえに，求める点の座標は　$\left(\dfrac{13}{8},\ \dfrac{9}{4}\right)$

参考　求める点Pは，線分ABの垂直二等分線と $y=2x-1$ の交点である。

４．３点 A$(1,\ -2)$，B$(-1,\ 2)$，C を頂点とする三角形が正三角形になるとき，点 C の座標を求めよ。

解答　$(2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$，$(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

点 C の座標を $(x,\ y)$ とおく。

△ABC が正三角形であるとき　　AB＝BC＝CA

すなわち　$AB^2=BC^2=CA^2$

$AB^2=BC^2$ から　　$(-1-1)^2+\{2-(-2)\}^2=\{x-(-1)\}^2+(y-2)^2$

$BC^2=CA^2$ から　　$\{x-(-1)\}^2+(y-2)^2=(1-x)^2+(-2-y)^2$

整理すると　$(x+1)^2+(y-2)^2=20$　……①

$x=2y$　……②

② を ① に代入して　$(2y+1)^2+(y-2)^2=20$

整理すると　$5y^2=15$　　よって　$y=\pm\sqrt{3}$

② から　$y=\sqrt{3}$ のとき　$x=2\sqrt{3}$，$y=-\sqrt{3}$ のとき　$x=-2\sqrt{3}$

よって，点 C の座標は　$(2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$，$(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

５．点 $(3,\ 2)$ を通り，２点 $(-3,\ -2)$，$(5,\ 7)$ を結ぶ線分に平行な直線と垂直な直線の方程式を，それぞれ求めよ。

解答　順に $9x-8y-11=0$，$8x+9y-42=0$

２点 $(-3,\ -2)$，$(5,\ 7)$ を結ぶ線分の傾きは　$\dfrac{7-(-2)}{5-(-3)}=\dfrac{9}{8}$

[1]　平行な直線の方程式は

$$y-2=\frac{9}{8}(x-3)\quad すなわち\quad 9x-8y-11=0$$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると　$\dfrac{9}{8}m=-1$　　よって　$m=-\dfrac{8}{9}$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$$y-2=-\frac{8}{9}(x-3)\quad すなわち\quad 8x+9y-42=0$$

６．２点 A$(1,\ 2)$，B$(4,\ 1)$ を結ぶ線分の垂直二等分線の方程式を求めよ。

解答　$3x-y-6=0$

線分 AB の中点の座標は　$\left(\dfrac{1+4}{2},\ \dfrac{2+1}{2}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

また，直線 AB の傾きは　$\dfrac{1-2}{4-1}=-\dfrac{1}{3}$

直線 AB に垂直な直線の傾きを m とすると

$-\dfrac{1}{3}m=-1$　　ゆえに　$m=3$

よって，求める直線は，点 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通り，傾きが３であるから，その方程式は

$$y-\frac{3}{2}=3\left(x-\frac{5}{2}\right)\qquad すなわち\qquad 3x-y-6=0$$

７．直線 $3x+2y-6=0$ について，点 $(3,\ 1)$ と対称な点の座標を求めよ。

解答　$\left(\dfrac{9}{13},\ -\dfrac{7}{13}\right)$

２点 $(3,\ 1)$，$(p,\ q)$ を通る直線が直線 $3x+2y-6=0$ に垂直であるから

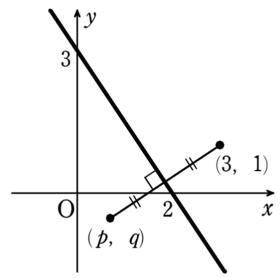
$$\frac{q-1}{p-3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$$

すなわち　$2p-3q=3$　……①

また，２点 $(3,\ 1)$，$(p,\ q)$ を結ぶ線分の中点が，直線 $3x+2y-6=0$ 上にあるから

$$3\cdot\frac{3+p}{2}+2\cdot\frac{1+q}{2}-6=0$$

すなわち　$3p+2q=1$　……②



①，② を連立して解くと　$p=\dfrac{9}{13}$，$q=-\dfrac{7}{13}$

したがって，求める点の座標は　$\left(\dfrac{9}{13},\ -\dfrac{7}{13}\right)$

8．3 点 O (0, 0)，A (4, 6)，B (8, 3) を頂点とする三角形 OABの面積を求めよ。

解答　18

2 点 O，A を通る直線の方程式は

$3x-2y=0$

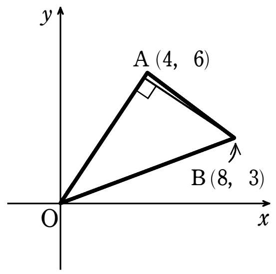
点 B と直線 OA の距離 h は

$$h=\frac{|3\cdot 8-2\cdot 3|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{18}{\sqrt{13}}$$

また　　$\mathrm{OA}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$

よって，求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{13}\cdot\frac{18}{\sqrt{13}}=18$$



別解　O (0, 0)，A (x_1, y_1)，B (x_2, y_2) のとき　　$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

9．3 直線 $x-2y+9=0$，$3x+y-1=0$，$ax-y+5=0$ が三角形を作らないとき，定数 a の値を求めよ。

解答　$a=-3,\ \frac{1}{2},\ 1$

$x-2y+9=0$ …… ①，$3x+y-1=0$ …… ②，$ax-y+5=0$ …… ③ とする。

直線 ① の傾きは $\frac{1}{2}$，直線 ② の傾きは -3，直線 ③ の傾きは a

よって，3 直線 ①，②，③ が三角形を作らないとき，次の 2 つの場合がある。

[1]　直線 ③ が直線 ① または直線 ② と平行になる。

直線 ③ が直線 ① と平行になるとき　　$a=\frac{1}{2}$

直線 ③ が直線 ② と平行になるとき　　$a=-3$

[2]　3 直線が 1 点で交わる。

①，② を連立して解くと　　$x=-1,\ y=4$

よって，2 直線 ①，② の交点の座標は　　$(-1, 4)$

直線 ③ が点 $(-1, 4)$ を通るとき　　$a\cdot(-1)-4+5=0$

よって　　$a=1$

以上から，求める a の値は　　$a=-3,\ \frac{1}{2},\ 1$

10．次の直線は，定数 k の値に関係なく定点を通る。その定点の座標を求めよ。

$$(2k+1)x+(k+4)y-k+3=0$$

解答　$(1, -1)$

与式を k について整理すると　　$k(2x+y-1)+x+4y+3=0$

これを k についての恒等式と考えると　　$2x+y-1=0,\ x+4y+3=0$

これを解いて　　$x=1,\ y=-1$

よって，与えられた直線は定点 $(1, -1)$ を通る。

11．次の 3 点を通る円の方程式を求めよ。$(-3, 4)$，$(4, 5)$，$(1, -4)$

解答　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 $(-3, 4)$ を通るから　　$(-3)^2+4^2-3l+4m+n=0$

ゆえに　　$3l-4m-n=25$　…… ①

点 $(4, 5)$ を通るから　　$4^2+5^2+4l+5m+n=0$

ゆえに　　$4l+5m+n=-41$　…… ②

点 $(1, -4)$ を通るから　　$1^2+(-4)^2+l-4m+n=0$

ゆえに　　$l-4m+n=-17$　…… ③

①，②，③ を解いて　　$l=-2,\ m=-2,\ n=-23$

よって　　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

12．2 点 $(0, 1)$，$(2, 3)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

解答　$(x-1)^2+(y-2)^2=2$

円の中心は，与えられた 2 点を結ぶ線分の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{1+3}{2}\right)$$　すなわち　$(1, 2)$

半径は　　$\frac{1}{2}\sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{2}$

よって　　$(x-1)^2+(y-2)^2=2$

13．2 点 $(-5, 1)$，$(2, 8)$ を通り，x 軸に接する円の方程式を求めよ。

解答　$(x+10)^2+(y-13)^2=169$，$(x+2)^2+(y-5)^2=25$

x 軸に接するから，求める円の方程式は，$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ とおける。

これが 2 点 $(-5, 1)$，$(2, 8)$ を通るから

$(-5-a)^2+(1-b)^2=b^2$，$(2-a)^2+(8-b)^2=b^2$

ゆえに　　$a^2+10a-2b+26=0$　…… ①

$a^2-4a-16b+68=0$　…… ②

①×8－② から　　$7a^2+84a+140=0$　すなわち　$a^2+12a+20=0$

これを解いて　　$a=-10,\ -2$

また，$(-5-a)^2+(1-b)^2=b^2$ から　　$b=\frac{1}{2}\{(a+5)^2+1\}$

この式に求めた a の値を代入すると

$a=-10$ のとき　$b=13$，$a=-2$ のとき　$b=5$

よって，求める円の方程式は

$(x+10)^2+(y-13)^2=169$，$(x+2)^2+(y-5)^2=25$