

1 3点A(4, 2), B(0, 1), C(2, 0)および、点Dに対して、次のものを求めよ。

(1) 線分BCの長さ

(2) 直線BCの方程式

(3) 点Aと直線BCとの距離

(4) 四角形ABCDが平行四辺形となるとき点Dの座標

(5) $\square ABCD$ の面積

2 点(-4, -7)を通り、直線 $2x+y-11=0$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

3 直線 $x+3y-5=0$ を ℓ とする。直線 ℓ について、点A(4, 7)と対称な点Bの座標を求めよ。

4 2点A(-3, 2), B(9, -4)に対して、線分ABを5:3に内分する点と外分する点の座標をそれぞれ求めよ。

内分 _____ 外分 _____

5 次のような円の方程式を求めよ。

(1) 中心が点(-3, -4)で、原点を通る円

(2) 中心が点(2, -4)で、 x 軸に接する円

(3) 2点(4, -5), (2, 3)を直径の両端とする円

[6] 原点O, A($3\sqrt{3}$, 3), B(0, 6)に対し, 以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle OAB$ はどのような形の三角形か答えよ。(必ず根拠を示すこと)

(2) $\triangle OAB$ の重心の座標を求めよ。

(3) $\triangle OAB$ の外心の座標と外接円の半径を求めよ。

[7] 直線 $y=2x+k$ と円 $x^2+y^2=5$ が共有点をもたないとき, 定数 k の値の範囲を求めよ。

[8] 円 $x^2+y^2=5$ について, 次の条件を満たすときの接線の方程式を求めよ。

条件 接点が第2象限にあり, その y 座標が1である。

[9] 点(6, 2)から円 $x^2+y^2=20$ に引いた接線の方程式を求めよ。

[10] 2つの円 $x^2+y^2+4x-6y-4=0$ ……①, $x^2+y^2-8x-18y+68=0$ ……② について, 次の問いに答えよ。

(1) 2つの円①, ②の2つの交点と点(1, 3)を通る円の方程式を求めよ。

(2) 2つの円①, ②の2つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

[1] 3点A(4, 2), B(0, 1), C(2, 0)および点Dに対して、次のものを求めよ。

(1) 線分BCの長さ

$$BC = \sqrt{1+4} = \underline{\sqrt{5}}$$

(2) 直線BCの方程式

傾き: $-\frac{1}{2}$. 切片: 1

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$(x + 2y - 2 = 0)$$

(3) 点Aと直線BCとの距離

(2) より

$$d = \frac{|4 + 2 \times 2 - 2|}{\sqrt{1+4}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \underline{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)}$$

(4) 四角形ABCDが平行四辺形となるとき点Dの座標

ACの中点 = BDの中点 より D(p, q)とすると

$$\textcircled{x} \quad \frac{4+2}{2} = \frac{0+p}{2} \quad \text{より} \quad p = 6$$

$$\textcircled{y} \quad \frac{2+0}{2} = \frac{1+q}{2} \quad \text{より} \quad q = 1$$

$$\underline{D(6, 1)}$$

(5) 四角形ABCDの面積

(1), (3)より

$$\square ABCD = BC \times d = \sqrt{5} \times \frac{6}{\sqrt{5}} = \underline{6}$$

[2] 点(-4, -7)を通り、直線 $2x + y - 11 = 0$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

$$y = -2x + 11 \quad \text{より} \quad \text{傾き} -2$$

垂直な直線の傾きは m は $-2 \times m = -1$

$$m = \frac{1}{2}$$

よって

$$y - (-7) = \frac{1}{2} \{x - (-4)\}$$

$$y + 7 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$y = \frac{1}{2}x - 5$$

$$(x - 2y - 10 = 0)$$

[3] 直線 $x + 3y - 5 = 0$ を ℓ とする。直線 ℓ について、点A(4, 7)と対称な点Bの座標を求めよ。

$$\ell: y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

点B(p, q)とすると

 $\ell \perp AB$ より

$$-\frac{1}{3} \times \frac{q-7}{p-4} = -1$$

$$q - 7 = 3(p - 4)$$

$$q = 3p - 5 \quad \textcircled{1}$$

線分ABの中点 $\left(\frac{p+4}{2}, \frac{q+7}{2}\right)$ が ℓ 上より

$$\frac{p+4}{2} + 3 \frac{q+7}{2} - 5 = 0$$

$$p + 4 + 3q + 21 - 10 = 0$$

$$p + 3q = -15 \quad \textcircled{2}$$

①を代入して

$$p + 9p - 15 = -15$$

$$10p = 0$$

$$p = 0$$

$$\textcircled{2} \text{より} \quad q = -5$$

ゆえに

$$\underline{B(0, -5)}$$

[4] 2点A(-3, 2), B(9, -4)に対して、線分ABを5:3に内分する点と外分する点の座標をそれぞれ求めよ。

内分

$$\textcircled{x} \quad \frac{3 \times (-3) + 5 \times 9}{5+3} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

外分

$$\textcircled{x} \quad \frac{-3 \times (-3) + 5 \times 9}{5-3} = \frac{54}{2} = 27$$

$$\textcircled{y} \quad \frac{3 \times 2 + 5 \times (-4)}{5+3} = \frac{-14}{8} = -\frac{7}{4}$$

$$\textcircled{y} \quad \frac{-3 \times 2 + 5 \times (-4)}{5-3} = \frac{-26}{2} = -13$$

$$\text{内分} \quad \left(\frac{9}{2}, -\frac{7}{4}\right) \quad \text{外分} \quad (27, -13)$$

[5] 次のような円の方程式を求めよ。

(1) 中心が点(-3, -4)で、原点を通る円

$$\text{半径} \quad \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{よって} \quad \{x - (-3)\}^2 + \{y - (-4)\}^2 = 5^2$$

$$(x+3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

(2) 中心が点(2, -4)で、x軸に接する円

$$\text{半径} \quad |-4| = 4$$

よって

$$\{x - 2\}^2 + \{y - (-4)\}^2 = 4^2$$

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 16$$

(3) 2点(4, -5), (2, 3)を直径の両端とする円

$$\text{中心} \quad \left(\frac{4+2}{2}, \frac{-5+3}{2}\right) \text{より} \quad (3, -1)$$

$$\text{半径} \quad \frac{1}{2} \sqrt{(4-2)^2 + (-5-3)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4+64} = \frac{1}{2} \sqrt{68} = \sqrt{17}$$

よって

$$\{x - 3\}^2 + \{y - (-1)\}^2 = (\sqrt{17})^2$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 17$$

[6] 原点O, A(3√3, 3), B(0, 6)に対し, 以下の問に答えよ。

(1) △OABはどのような形の三角形か答えよ。(必ず根拠を示すこと)

$$OA = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6$$

$$OB = 6$$

$$AB = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6$$

$$OA = OB = AB \text{ より}$$

△OABは正三角形

(2) △OABの重心の座標を求めよ。

$$\textcircled{x} \quad \frac{0+3\sqrt{3}+0}{3} = \sqrt{3}$$

$$\textcircled{y} \quad \frac{0+3+6}{3} = 3$$

$$(\sqrt{3}, 3)$$

(3) △OABの外心の座標と外接円の半径を求めよ。

(1)より△OABは正三角形だから

重心と外心は一致する

よって外心 $(\sqrt{3}, 3)$

また正三角形より, 外接円の半径Rは

$$2R = \frac{6}{\sin 60^\circ} \text{ より } R = 3 \div \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

$$\textcircled{811} \quad x^2 + y^2 + lx + my + n = 0 \text{ と (2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} n=0 \\ 3\sqrt{3}l+3m+n=-36 \\ 6m+n=-36 \end{array} \right\} \therefore \left. \begin{array}{l} l=-2\sqrt{3} \\ m=-6 \\ n=0 \end{array} \right\}$$

$$\text{よって } x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - 6y = 0 \quad \Delta$$

$$(x-\sqrt{3})^2 + (y-3)^2 = 12$$

$$r = 1, \sqrt{3}, 2, 1 \quad \text{半径 } 2\sqrt{3}$$

[7] 直線 $y=2x+k$ と円 $x^2+y^2=5$ が共有点をもたないとき, 定数 k の値の範囲を求めよ。

$$2x-y+k=0 \quad \text{中心 } (0,0) \quad \text{半径 } \sqrt{5}=r$$

円中心と直線の距離 d は

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

共有点をもたないための条件は $d > r$ より

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} > \sqrt{5}$$

$$|k| > 5$$

$$k < -5, 5 < k$$

[8] 円 $x^2+y^2=5$ について, 次の条件を満たすときの接線の方程式を求めよ。

条件 接点が第2象限にあり, そのy座標が1である。

接点のx座標は $x^2+y^2=5$ に $y=1$ を代入して

$$x^2+1=5$$

$$x^2=4$$

接点のx座標は $x=2$ であるから

$$x=-2$$

よって点 $(-2, 1)$ における接線の方程式は

$$-2x+y=5$$

$$(2x-y+5=0)$$

[9] 点(6, 2)から円 $x^2+y^2=20$ に引いた接線の方程式を求めよ。

接点の座標を (p, q) とすると

$$p^2+q^2=20 \quad \textcircled{1}$$

また2点における接線の方程式は

$$px+qy=20$$

これが $(6, 2)$ を通るから

$$6p+2q=20$$

$$3p+q=10$$

$$q=10-3p \quad \textcircled{2}$$

①に②を代入して

$$p^2+(10-3p)^2=20$$

$$10p^2-60p+80=0$$

$$p^2-6p+8=0$$

$$(p-4)(p-2)=0$$

$$p=2, 4$$

①, ②を連立

までして

$$p=2 \text{ とき } q=4$$

$$\text{接線 } 2x+4y=20$$

$$x+2y=10$$

$$p=4 \text{ とき } q=-2$$

$$\text{接線 } 4x-2y=20$$

$$2x-y=10$$

よって

[10] 2つの円 $x^2+y^2+4x-6y-4=0$ ①, $x^2+y^2-8x-18y+68=0$ ② について, 次の問に答えよ。

(1) 2つの円①, ②の2つの交点と点(1, 3)を通る円の方程式を求めよ。

①, ②の2つの交点を通る円の方程式は

$$k(x^2+y^2+4x-6y-4) + (x^2+y^2-8x-18y+68)=0 \quad \textcircled{3}$$

と書ける。これが $(1, 3)$ を通るから

$$k(1+9+4-18-4) + (1+9-8-18+68)=0$$

$$-8k + 16 = 0$$

$$k = 2$$

③に $k=2$ を代入して

$$3x^2+3y^2-30y+60=0$$

$$x^2+y^2-10y+20=0$$

$$(x^2+(y-5)^2=5)$$

(2) 2つの円①, ②の2つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

求める直線の方程式は③で $k=-1$ ときから

③に $k=-1$ を代入して

$$-12x-12y+72=0$$

$$x+y-6=0$$

$$(y=-x+6)$$