第 2学年 6組　第 2回定期考査　**数学**　H18.7.4（火）　　Class(　　)No.(　　)Name(　　　　　　　　)

1. 3 点 A(5, −2), B(1, 5), C(−1, 2) を頂点とする △ABC がある。

(1)　3 辺の長さを求めよ。

(2)　△ABC の面積 S を求めよ。

(3)　△ABC の重心 G を求めよ。

(4)　線分 BC を 3 : 2 に内分する点 P　　(5)　線分 CA を 3 : 2 に外分する点 Q

2. 直線 $2x+y+1=0$ を ℓ とする。直線 ℓ について，点P(−3, 1) と対称な点 Q の座標を求めよ。

3. 直線 $2x+y+2=0$ を ℓ とし，放物線 $y=x^2$ 上の点を P とする。P と ℓ の距離が最小となるとき，Pの座標を求めよ。また，そのときの P と ℓ の距離を求めよ。

4. 次のような円の方程式を求めよ。

(1)　中心が点 (2, 1) で，x 軸に接する円

(2)　2 点 (5, 1), (1, 3) を直径の両端とする円

5. 円 $x^2+y^2-10x+12y=3$ の中心の座標と半径を求めよ。

6. 直線 $y=2x+k$ と円 $x^2+y^2=1$ が共有点をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

7. 3 点 $(1,\ 3)$，$(4,\ 2)$，$(5,\ -5)$ を通る円の方程式を求めよ。

8. 点 A $(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=2$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

9. 円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 上の点 $(5,\ 7)$ における接線の方程式を求めよ。

10. 円 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ が直線 $y=3x-6$ から切り取る弦の長さを求めよ。また，弦の中点の座標を求めよ。

11. 2 円 $x^2+y^2-4=0$ ……①，$x^2+y^2-4x-2y+1=0$ ……② の 2 つの交点を A，B とするとき，次の直線，円の方程式を求めよ。

(1) 直線 AB

(2) 交点 A，B と原点 O を通る円

第2学年6組　第2回定期考査　**数学**　H18.7.4（火）　　Class(　　)No.(　　)Name(　　　　)

1. (1)　$AB=\sqrt{(1-5)^2+\{5-(-2)\}^2}$

$=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$

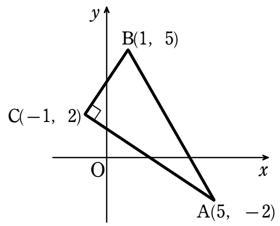
$BC=\sqrt{(-1-1)^2+(2-5)^2}$

$=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$CA=\sqrt{\{5-(-1)\}^2+(-2-2)^2}$

$=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$

$=2\sqrt{13}$



(2)　(1) より，$AB^2=65$，$BC^2=13$，$CA^2=52$

であるから　　$AB^2=BC^2+CA^2$

よって，△ABC は ∠C＝90° の直角三角形である。

ゆえに　　$S=\dfrac{1}{2}BC\cdot CA=\dfrac{1}{2}\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{13}=13$

(3)　点 G の座標は，$\left(\dfrac{5+1+(-1)}{3},\ \dfrac{(-2)+5+2}{3}\right)$ から　　$\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$

(4)　点 P の座標は，$\left(\dfrac{2\cdot 1+3\cdot(-1)}{3+2},\ \dfrac{2\cdot 5+3\cdot 2}{3+2}\right)$ から　　$\left(-\dfrac{1}{5},\ \dfrac{16}{5}\right)$

(5)　点 Q の座標は，$\left(\dfrac{-2\cdot(-1)+3\cdot 5}{3-2},\ \dfrac{-2\cdot 2+3\cdot(-2)}{3-2}\right)$ から　　$(17,\ -10)$

2. 点 Q の座標を $(p,\ q)$ とする。

[1]　直線 ℓ の傾きは　-2

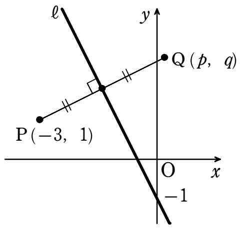
直線 PQ の傾きは　$\dfrac{q-1}{p+3}$

$PQ\perp\ell$ であるから

$\dfrac{q-1}{p+3}\cdot(-2)=-1$

ゆえに　　$2(q-1)=p+3$

よって　　$p-2q+5=0$　…… ①



[2]　線分 PQ の中点 $\left(\dfrac{-3+p}{2},\ \dfrac{1+q}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

$2\cdot\dfrac{-3+p}{2}+\dfrac{1+q}{2}+1=0$

ゆえに　　$2(-3+p)+1+q+2=0$

よって　　$2p+q-3=0$　…… ②

①＋②×2 から　　$5p-1=0$　　　ゆえに　　$p=\dfrac{1}{5}$

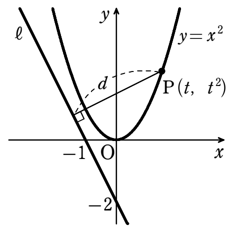
これを ② に代入して　$2\cdot\dfrac{1}{5}+q-3=0$　　よって　　$q=\dfrac{13}{5}$

したがって，求める点 Q の座標は　　$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

3. P は放物線 $y=x^2$ 上にあるから，その座標を $(t,\ t^2)$ とする。

P と ℓ の距離を d とすると

$$d=\frac{|2t+t^2+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|t^2+2t+2|}{\sqrt{5}}$$



ここで，$t^2+2t+2=(t+1)^2+1$ であり，この値は常に正である。

よって　　$d=\dfrac{t^2+2t+2}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\{(t+1)^2+1\}$

ゆえに，$t=-1$ のとき，d は最小となる。

したがって　　$P(-1,\ 1)$　　　このとき　　$d=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

4. (1)　x 軸に接するとき，円の半径は中心の y 座標の絶対値に等しい。

したがって　　$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

(2)　円の中心は，与えられた 2 点を結ぶ線分の中点であるから，その座標は

$\left(\dfrac{5+1}{2},\ \dfrac{1+3}{2}\right)$　　　すなわち　　$(3,\ 2)$

また，半径は　　$\dfrac{1}{2}\sqrt{(1-5)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$

したがって　　$(x-3)^2+(y-2)^2=5$

5.　方程式を変形すると

$(x^2-10x+5^2)-5^2+(y^2+12y+6^2)-6^2=3$

$(x-5)^2+(y+6)^2=3+25+36$

ゆえに　　$(x-5)^2+(y+6)^2=64$

よって，　中心 $(5,\ -6)$，半径 8

6. $\begin{cases} y=2x+k & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① を ② に代入して　　$x^2+(2x+k)^2=1$

整理すると　　$5x^2+4kx+k^2-1=0$　…… ③

判別式は　　$\dfrac{D}{4}=4k^2-5(k^2-1)=-k^2+5=-(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})$

直線 ① と円 ② が共有点をもたないための条件は　　$D\geqq 0$

ゆえに　　$-(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})\geqq 0$　　　よって　　$-\sqrt{5}\leqq k\leqq\sqrt{5}$

7. 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。

3 点 $(1,\ 3)$，$(4,\ 2)$，$(5,\ -5)$ を通るから

$l+3m+n+10=0$　…… ①

$4l+2m+n+20=0$　…… ②

$5l-5m+n+50=0$　…… ③

②−① から　　$3l-m+10=0$　…… ④

③−② から　　$l-7m+30=0$　…… ⑤

④×7−⑤ から　　$20l+40=0$　　　よって　　$l=-2$

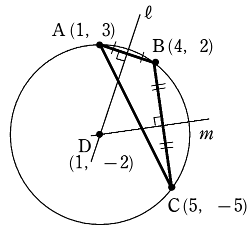
④ から　　$m=4$　　　① から　　$n=-20$

よって　　$x^2+y^2-2x+4y-20=0$

別解　$A(1,\ 3)$，$B(4,\ 2)$，$C(5,\ -5)$ とする。

弦 AB の中点の座標は　$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$，

直線 AB の傾きは　$-\dfrac{1}{3}$



よって，弦 AB の垂直二等分線 ℓ の方程式は

$y-\dfrac{5}{2}=3\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$

すなわち　　$3x-y-5=0$　…… ①

同様にして，弦 BC の垂直二等分線 m の方程式は

$x-7y-15=0$　…… ②

①，② を連立して解くと　　$x=1$，$y=-2$

ゆえに，円の中心は点 $D(1,\ -2)$ で，半径は　$DA=\sqrt{(1-1)^2+(3+2)^2}=5$

したがって，求める円の方程式は　　$(x-1)^2+(y+2)^2=25$

8. 接点を $P(a,\ b)$ とすると，P は円上にあるから

$a^2+b^2=2$　…… ①

また，P における接線の方程式は

$ax+by=2$　…… ②

で，この直線が点 A を通るから

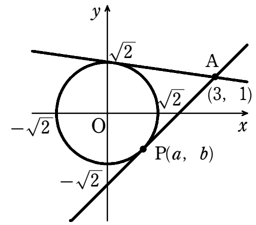
$3a+b=2$　…… ③

① と ③ から b を消去して　　$a^2+(2-3a)^2=2$

整理すると　　$5a^2-6a+1=0$

ゆえに　　$(a-1)(5a-1)=0$

よって　　$a=1,\ \dfrac{1}{5}$



③ から　$a=1$ のとき　$b=-1$，$a=\dfrac{1}{5}$ のとき　$b=\dfrac{7}{5}$

したがって，接線の方程式 ② と接点の座標は次のようになる。

接線：$x-y=2$，　接点の座標　$(1,\ -1)$

接線：$x+7y=10$，接点の座標　$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$

別解　点 $(3,\ 1)$ を通る接線は，x 軸に垂直でないから，求める接線の方程式は，次のようにおける。

$y-1=m(x-3)$　すなわち　$y=mx-(3m-1)$　……①

① を円の方程式に代入して　　$x^2+\{mx-(3m-1)\}^2=2$

展開して整理すると

$(m^2+1)x^2-2m(3m-1)x+(3m-1)^2-2=0$　……②

判別式は　$\dfrac{D}{4}=\{-m(3m-1)\}^2-(m^2+1)\{(3m-1)^2-2\}$

$=(3m-1)^2\{m^2-(m^2+1)\}+2(m^2+1)$

$=-(3m-1)^2+2(m^2+1)$

$=-7m^2+6m+1=-(7m^2-6m-1)$

$=-(m-1)(7m+1)$

円と直線 ① が接するための条件は　　$D=0$

ゆえに　　$(m-1)(7m+1)=0$　　　よって　　$m=1,\ -\dfrac{1}{7}$

求めた m の値を ① に代入すると

$m=1$　　のとき　　$y=x-2$　　　……③

$m=-\dfrac{1}{7}$ のとき　　$y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{10}{7}$　……④

また，2 次方程式 ② の重解は　$x=-\dfrac{-2m(3m-1)}{2(m^2+1)}=\dfrac{m(3m-1)}{m^2+1}$

$m=1$　　を代入して　　$x=\dfrac{1\cdot(3\cdot1-1)}{1^2+1}=1$

$m=-\dfrac{1}{7}$ を代入して　　$x=\dfrac{-\dfrac{1}{7}\left\{3\left(-\dfrac{1}{7}\right)-1\right\}}{\left(-\dfrac{1}{7}\right)^2+1}=\dfrac{1}{5}$

接点の y 座標は，$x=1$ を ③ に代入して　　$y=-1$

$x=\dfrac{1}{5}$ を ④ に代入して　　$y=\dfrac{7}{5}$

以上から，接線の方程式と接点の座標は，次のようになる。

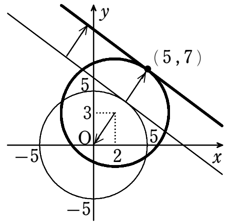
接線：$x-y=2$，　接点の座標　$(1,\ -1)$

接線：$x+7y=10$，接点の座標　$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$

9. 円の中心 $(2,\ 3)$ と点 $(5,\ 7)$ を通る直線の傾きは　　$\dfrac{7-3}{5-2}=\dfrac{4}{3}$

求める接線は，この直線に垂直で，点 $(5,\ 7)$ を通るから，その方程式は

$y-7=-\dfrac{3}{4}(x-5)$　　　すなわち　　$3x+4y=43$



別解　円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$　……① を，

中心 $(2,\ 3)$ が原点 $(0,\ 0)$ にくるように平行移動すると

円 $x^2+y^2=25$　……②

になる。

この平行移動により，円 ① 上の点 $(5,\ 7)$ は点 $(3,\ 4)$ に移る。

点 $(3,\ 4)$ における円 ② の接線の方程式は

$3x+4y=25$　……③

求める接線は，③ を x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したもので，その方程式は

$3(x-2)+4(y-3)=25$　　　すなわち　　$3x+4y=43$

参考　円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

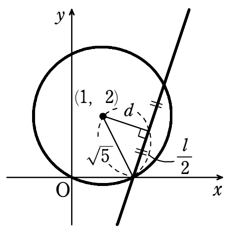
これを利用すると，本問の接線の方程式は

$(5-2)(x-2)+(7-3)(y-3)=25$

から求められる。

10. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$　……①，$y=3x-6$　……②

とする。



円 ① の中心 $(1,\ 2)$ と直線 ② の距離 d は

$d=\dfrac{|3\cdot1-2-6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

弦の長さを l とすると，円 ① の半径は $\sqrt{5}$ であるから

$\left(\dfrac{l}{2}\right)^2=(\sqrt{5})^2-d^2=\dfrac{5}{2}$

ゆえに　$l^2=10$　　よって，弦の長さは　$l=\sqrt{10}$

円 ① の中心 $(1,\ 2)$ を通り，直線 ② に垂直な直線の方程式は　　$y-2=-\dfrac{1}{3}(x-1)$

すなわち　　$x+3y-7=0$　……③

直線 ②，③ の交点が，弦の中点であるから，②，③ を連立して解くと　$x=\dfrac{5}{2}$，$y=\dfrac{3}{2}$

したがって，弦の中点の座標は　　$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

別解　② を ① に代入して　　$(x-1)^2+(3x-8)^2=5$

整理すると　　$x^2-5x+6=0$　　　よって　　$(x-2)(x-3)=0$

ゆえに　　$x=2,\ 3$

② から，$x=2$ のとき　$y=0$，$x=3$ のとき　$y=3$

よって，円 ① と直線 ② の交点の座標は　　$(2,\ 0)$，$(3,\ 3)$

弦の長さを l とすると　　$l=\sqrt{(3-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$

また，弦の中点の座標は　　$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

11. k を定数として，次の方程式を考える。

$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-4x-2y+1)=0$　……③

このとき，方程式 ③ は，2 つの円 ①，② の交点を通る図形を表す。

(1)　③ で $k=-1$ とすると

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-4x-2y+1)=0$

よって　　$4x+2y-5=0$

これは直線を表すから，直線 AB の方程式である。

(2)　図形 ③ が原点を通るとして，③ に $x=0$，$y=0$ を代入すると　$-4+k=0$

よって　　$k=4$

$k=4$ を ③ に代入して整理すると

$5x^2+5y^2-16x-8y=0$

これは円を表すから，求める方程式である。