数学演習（円の方程式•円と直線）Ｈ２４．２．１７　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．次のような円の方程式を求めよ。

(1)　中心が原点，半径５の円

(2)　中心が点 $(2,\ -3)$，半径３の円

(3)　中心が点 $(-2,\ 4)$ で，原点を通る円

(4)　中心が点 $(-3,\ 5)$ で，x 軸に接する円と y 軸に接する円

(5)　２点 $(0,\ 1)$，$(2,\ 3)$ を直径の両端とする円

２．次の円の中心の座標と半径を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=16$

(2)　$(x-3)^2+(y+4)^2=25$

(3)　$x^2+y^2-10x=0$

(4)　$x^2+y^2-6x-4y-12=0$

(5)　$x^2+y^2-2x+y-1=0$

３．次の３点を通る円の方程式を求めよ。

(1)　$(0,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(-1,\ 3)$

(2)　$(-3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(1,\ -4)$

４．次の３点Ａ，Ｂ，Ｃを頂点とする△ABCの外接円の半径と外心の座標を求めよ。

(1)　A $(1,\ 1)$，B $(5,\ -1)$，C $(-3,\ -7)$

(2)　A $(2,\ 0)$，B $(1,\ -1)$，C $(3,\ 3)$

５．次のような円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(1,\ 2)$ を通り，x 軸と y 軸の両方に接する円

(2)　中心が直線 $y=2x$ 上にあり，原点と点 $(2,\ 4)$ を通る円

(3)　２点 $(-5,\ 1)$，$(2,\ 8)$ を通り，x 軸に接する円

６．方程式 $x^2+y^2+2mx+m=0$ が円を表すように，定数 m の値の範囲を定めよ。

7．次の円と直線の位置関係 (異なる 2 点で交わる，接する，共有点がない) を調べ，共有点があればその座標を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=4$，$x+y=2$　　(2)　$x^2+y^2=5$，$x-2y=5$

(3)　$x^2+y^2-4x+2y+4=0$，$y=2x-1$

8．直線 $y=2x+k$ と円 $x^2+y^2=1$ が共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲を求めよ。また，接するときの k の値と接点の座標を求めよ。

9．次の円と直線の共有点の個数を調べよ。

(1)　$x^2+y^2=4$，$y=-2x+k$　　(2)　$x^2+y^2=1$，$x-ky+3=0$

10．半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $2x+y-5=0$ が接するとき，r の値を求めよ。

11．中心が (3，0) で，直線 $4x-3y-2=0$ に接する円の方程式を求めよ。

数学演習（円の方程式･円と直線）Ｈ２４．２．１７

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1． 次のような円の方程式を求めよ。

(1)　中心が原点，半径 5 の円　　　(2)　中心が点 (2，−3)，半径 3 の円

(3)　中心が点 (−2，4) で，原点を通る円

(4)　中心が点 (−3，5) で，x 軸に接する円と y 軸に接する円

(5)　2 点 (0，1)，(2，3) を直径の両端とする円

解答　(1)　$x^2+y^2=25$　(2)　$(x-2)^2+(y+3)^2=9$　(3)　$(x+2)^2+(y-4)^2=20$

(4)　順に $(x+3)^2+(y-5)^2=25$，$(x+3)^2+(y-5)^2=9$

(5)　$(x-1)^2+(y-2)^2=2$

解説

(1)　$x^2+y^2=5^2$ から　$x^2+y^2=25$

(2)　$(x-2)^2+\{y-(-3)\}^2=3^2$ から　$(x-2)^2+(y+3)^2=9$

(3)　求める円の半径を r とすると，円の方程式は　$(x+2)^2+(y-4)^2=r^2$

これが原点を通るから　$(0+2)^2+(0-4)^2=r^2$　ゆえに　$r^2=20$

よって　$(x+2)^2+(y-4)^2=20$

(4)　x 軸に接するとき，円の半径は中心の y 座標の絶対値 5 に等しい。

よって　$(x+3)^2+(y-5)^2=25$

y 軸に接するとき，円の半径は中心の x 座標の絶対値 3 に等しい。

よって　$(x+3)^2+(y-5)^2=9$

(5)　円の中心は，与えられた 2 点を結ぶ線分の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{1+3}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad (1,\ 2)$$

半径は　$\dfrac{1}{2}\sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{2}$

よって　$(x-1)^2+(y-2)^2=2$

2． 次の円の中心の座標と半径を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=16$　　(2)　$(x-3)^2+(y+4)^2=25$

(3)　$x^2+y^2-10x=0$　　(4)　$x^2+y^2-6x-4y-12=0$

(5)　$x^2+y^2-2x+y-1=0$

解答　中心の座標，半径の順に

(1)　(0，0)，4　(2)　(3，−4)，5　(3)　(5，0)，5　(4)　(3，2)，5

(5)　$\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$\dfrac{3}{2}$

解説

(1)　$x^2+y^2=4^2$ から　中心 (0，0)，半径 4

(2)　$(x-3)^2+(y+4)^2=5^2$ から　中心 (3，−4)，半径 5

(3)　方程式を変形すると　$(x^2-10x+5^2)-5^2+y^2=0$

ゆえに　$(x-5)^2+y^2=25$

よって　中心 (5，0)，半径 5

(4)　方程式を変形すると

$$(x^2-6x+3^2)-3^2+(y^2-4y+2^2)-2^2-12=0$$

ゆえに　$(x-3)^2+(y-2)^2=25$

よって　中心 (3，2)，半径 5

(5)　方程式を変形すると

$$(x^2-2x+1^2)-1^2+\left\{y^2+y+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=0$$

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1+1+\frac{1}{4}$$

ゆえに　$(x-1)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$

よって　中心 $\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{3}{2}$

3． 次の 3 点を通る円の方程式を求めよ。

(1)　(0，0)，(2，0)，(−1，3)　　(2)　(−3，4)，(4，5)，(1，−4)

解答　(1)　$x^2+y^2-2x-4y=0$　(2)　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

解説

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

(1)　点 (0，0) を通るから　$n=0$　……①

点 (2，0) を通るから　$2^2+2l+n=0$　……②

点 (−1，3) を通るから　$(-1)^2+3^2-l+3m+n=0$

ゆえに　$l-3m-n=10$　……③

①，②，③ を解いて　$l=-2$，$m=-4$，$n=0$

よって　$x^2+y^2-2x-4y=0$

(2)　点 (−3，4) を通るから　$(-3)^2+4^2-3l+4m+n=0$

ゆえに　$3l-4m-n=25$　……①

点 (4，5) を通るから　$4^2+5^2+4l+5m+n=0$

ゆえに　$4l+5m+n=-41$　……②

点 (1，−4) を通るから　$1^2+(-4)^2+l-4m+n=0$

ゆえに　$l-4m+n=-17$　……③

①，②，③ を解いて　$l=-2$，$m=-2$，$n=-23$

よって　$x^2+y^2-2x-2y-23=0$

4． 次の 3 点 A，B，C を頂点とする△ABCの外接円の半径と外心の座標を求めよ。

(1)　A (1，1)，B (5，−1)，C (−3，−7)

(2)　A (2，0)，B (1，−1)，C (3，3)

解答　(1)　半径 5，外心 (1，−4)　(2)　半径 5，外心 (−2，3)

解説

(1)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 A を通るから　$1^2+1^2+l+m+n=0$

点 B を通るから　$5^2+(-1)^2+5l-m+n=0$

点 C を通るから　$(-3)^2+(-7)^2-3l-7m+n=0$

整理すると

$l+m+n+2=0$

$5l-m+n+26=0$

$3l+7m-n-58=0$

これを解くと　$l=-2$，$m=8$，$n=-8$

よって，求める円の方程式は

$x^2+y^2-2x+8y-8=0$

平方完成して　$(x-1)^2+(y+4)^2=25$

したがって，外接円の半径は $\sqrt{25}=5$，外心の座標は　(1，−4)

(2)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 A を通るから　$2^2+2l+n=0$

点 B を通るから　$1^2+(-1)^2+l-m+n=0$

点 C を通るから　$3^2+3^2+3l+3m+n=0$

整理すると

$2l+n+4=0$

$l-m+n+2=0$

$3l+3m+n+18=0$

これを解くと　$l=4$，$m=-6$，$n=-12$

よって，求める円の方程式は

$x^2+y^2+4x-6y-12=0$

平方完成して　$(x+2)^2+(y-3)^2=25$

したがって，外接円の半径は $\sqrt{25}=5$，外心の座標は　(−2, 3)

5． 次のような円の方程式を求めよ。

(1)　点 (1，2) を通り，x 軸と y 軸の両方に接する円

(2)　中心が直線 $y=2x$ 上にあり，原点と点 (2，4) を通る円

(3)　2 点 (−5，1)，(2，8) を通り，x 軸に接する円

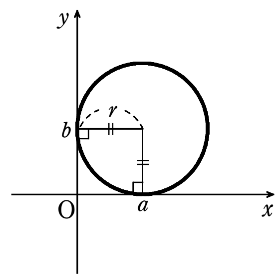
解答　(1)　$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$(x-5)^2+(y-5)^2=25$

(2)　$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

(3)　$(x+10)^2+(y-13)^2=169$，$(x+2)^2+(y-5)^2=25$

解説

(1)　両座標軸に接し，点 (1，2) を通るから，円の中心は第 1 象限にある。



円の中心の座標を (a，b)，半径を r とすると

$a>0$，$b>0$ で　$a=b=r$

よって，円の方程式は　$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

これが点 (1，2) を通るから　$(1-r)^2+(2-r)^2=r^2$

整理して　$r^2-6r+5=0$　ゆえに　$r=1$，5

よって，求める円の方程式は

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$(x-5)^2+(y-5)^2=25$

(2)　中心が直線 $y=2x$ 上にあるから，求める円の方程式は，$(x-a)^2+(y-2a)^2=r^2$ とおける。

これが原点と点 (2，4) を通るから

$(0-a)^2+(0-2a)^2=r^2$，$(2-a)^2+(4-2a)^2=r^2$

この 2 式から r を消去して

$(0-a)^2+(0-2a)^2=(2-a)^2+(4-2a)^2$

整理して　$-20a+20=0$　ゆえに　$a=1$　このとき　$r^2=5$

よって，求める円の方程式は　$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

(3)　x 軸に接するから，求める円の方程式は，$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ とおける。

これが 2 点 (−5，1)，(2，8) を通るから

$(-5-a)^2+(1-b)^2=b^2$，$(2-a)^2+(8-b)^2=b^2$

ゆえに　$a^2+10a-2b+26=0$　……①

$a^2-4a-16b+68=0$　……②

①×8−② から　$7a^2+84a+140=0$　すなわち　$a^2+12a+20=0$

これを解いて　$a=-10$，-2

また，$(-5-a)^2+(1-b)^2=b^2$ から　$b=\dfrac{1}{2}\{(a+5)^2+1\}$

この式に求めた a の値を代入すると

$a=-10$ のとき　$b=13$，$a=-2$ のとき　$b=5$

よって，求める円の方程式は

$$(x+10)^2+(y-13)^2=169,\ (x+2)^2+(y-5)^2=25$$

6．方程式 $x^2+y^2+2mx+m=0$ が円を表すように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答　$m<0,\ 1<m$

解説

方程式を変形すると

$$(x+m)^2+y^2=m^2-m$$

よって，中心　$(-m,\ 0)$　半径　$\sqrt{m^2-m}$

この方程式が円を表すためには半径が存在しなければならないので

$m^2-m>0$　　よって　$m(m-1)>0$ より　　$m<0,\ 1<m$

7．次の円と直線の位置関係（異なる 2 点で交わる，接する，共有点がない）を調べ，共有点があればその座標を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=4,\ x+y=2$　　　　(2)　$x^2+y^2=5,\ x-2y=5$

(3)　$x^2+y^2-4x+2y+4=0,\ y=2x-1$

解答　(1)　異なる 2 点 $(0,\ 2)$，$(2,\ 0)$ で交わる　　(2)　点 $(1,\ -2)$ で接する

(3)　共有点がない

解説

(1)　$\begin{cases} x^2+y^2=4 & \cdots\cdots ① \\ x+y=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② から　　$y=2-x$　……③

これを ① に代入して　　$x^2+(-x+2)^2=4$

よって　　$2x^2-4x=0$　　　ゆえに　　$2x(x-2)=0$

したがって　　$x=0,\ 2$

③ から　　$x=0$ のとき　$y=2$，$x=2$ のとき　$y=0$

よって，円 ① と直線 ② は異なる 2 点 $(0,\ 2)$，$(2,\ 0)$ で交わる。

(2)　$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ① \\ x-2y=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② から　　$x=2y+5$　……③

これを ① に代入して　　$(2y+5)^2+y^2=5$

よって　　$5y^2+20y+20=0$　　　ゆえに　　$5(y+2)^2=0$

したがって　　$y=-2$

③ から　　$y=-2$ のとき　$x=1$

よって，円 ① と直線 ② は点 $(1,\ -2)$ で接する。

(3)　$\begin{cases} x^2+y^2-4x+2y+4=0 & \cdots\cdots ① \\ y=2x-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① を変形して　　$(x-2)^2+(y+1)^2=1$　……①′

② を ①′ に代入して　　$(x-2)^2+(2x-1+1)^2=1$

ゆえに　　$5x^2-4x+3=0$

この 2 次方程式の判別式は，$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-5\cdot3=-11<0$ であり，実数解をもたない。

よって，円 ① と直線 ② は共有点をもたない。

8．直線 $y=2x+k$ と円 $x^2+y^2=1$ が共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲を求めよ。また，接するときの k の値と接点の座標を求めよ。

解答　(前半) $k<-\sqrt{5},\ \sqrt{5}<k$

(後半) $k=\sqrt{5}$ のとき $\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$，$k=-\sqrt{5}$ のとき $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

解説

$\begin{cases} y=2x+k & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① を ② に代入して　　$x^2+(2x+k)^2=1$

整理すると　　$5x^2+4kx+k^2-1=0$　……③

判別式は　　$\dfrac{D}{4}=4k^2-5(k^2-1)=-k^2+5=-(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})$

直線 ① と円 ② が共有点をもたないための条件は　　$D<0$

ゆえに　　$-(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})<0$　　　よって　　$k<-\sqrt{5},\ \sqrt{5}<k$

また，直線 ① と円 ② が接するための条件は　　$D=0$

ゆえに　　$-(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})=0$　　　よって　　$k=\pm\sqrt{5}$

また，2 次方程式 ③ が重解をもつとき，k の値を代入して2次方程式を解くと

$k=\sqrt{5}$ のとき，$5x^2+4\sqrt{5}x+4=0$　よって　$(\sqrt{5}x+2)^2=0$　より

$x=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}=-\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$　このとき　$y=2\left(-\dfrac{2}{5}\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

ゆえに　接点の座標は　　$\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$k=-\sqrt{5}$ のときも同様で，接点の座標は　　$\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

9．次の円と直線の共有点の個数を調べよ。

(1)　$x^2+y^2=4,\ y=-2x+k$　　　　(2)　$x^2+y^2=1,\ x-ky+3=0$

解答　(1)　$-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$ のとき 2 個；$k=\pm2\sqrt{5}$ のとき 1 個；

$k<-2\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}<k$ のとき 0 個

(2)　$k<-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}<k$ のとき 2 個；$k=\pm2\sqrt{2}$ のとき 1 個；

$-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$ のとき 0 個

解説

(1)　$x^2+y^2=4$　……①，$y=-2x+k$　……② とする。

② を ① に代入して　　$x^2+(-2x+k)^2=4$

整理すると　　$5x^2-4kx+k^2-4=0$

判別式は　　$\dfrac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-4)=-k^2+20=-(k+2\sqrt{5})(k-2\sqrt{5})$

したがって，共有点の個数は

$D>0$　すなわち　$-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$ のとき　　2 個

$D=0$　すなわち　$k=\pm2\sqrt{5}$ のとき　　1 個

$D<0$　すなわち　$k<-2\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}<k$ のとき　0 個

別解　円 ① の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ② の距離は　　$\dfrac{|2\cdot0+1\cdot0-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$

また，円 ① の半径は　2

したがって，共有点の個数は

$\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}<2$　すなわち　$-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$ のとき　　2 個

$\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}=2$　すなわち　$k=\pm2\sqrt{5}$ のとき　　1 個

$\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}>2$　すなわち　$k<-2\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}<k$ のとき　0 個

(2)　$x^2+y^2=1$　……①，$x-ky+3=0$　……② とする。

② から　　$x=ky-3$　……③

③ を ① に代入して　　$(ky-3)^2+y^2=1$

整理すると　　$(k^2+1)y^2-6ky+8=0$

判別式は　　$\dfrac{D}{4}=(-3k)^2-(k^2+1)\cdot8=k^2-8=(k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2})$

したがって，共有点の個数は

$D>0$　すなわち　$k<-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}<k$ のとき　2 個

$D=0$　すなわち　$k=\pm2\sqrt{2}$ のとき　　1 個

$D<0$　すなわち　$-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$ のとき　　0 個

別解　円 ① の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ② の距離は　　$\dfrac{|1\cdot0+(-k)\cdot0+3|}{\sqrt{1^2+(-k)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{k^2+1}}$

また，円 ① の半径は　1

$\dfrac{3}{\sqrt{k^2+1}}<1$ を解くと，両辺はともに正であるから，平方して分母を払うと

$3^2<k^2+1$　　　ゆえに　　$k^2>8$

よって　　$k<-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}<k$

同様にして，$\dfrac{3}{\sqrt{k^2+1}}=1$ を解くと　　$k=\pm2\sqrt{2}$

$\dfrac{3}{\sqrt{k^2+1}}>1$ を解くと　　$-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

したがって，共有点の個数は

$k<-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}<k$ のとき　2 個

$k=\pm2\sqrt{2}$ のとき　　1 個

$-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$ のとき　　0 個

10．半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $2x+y-5=0$ が接するとき，r の値を求めよ。

解答　$r=\sqrt{5}$

解説

円の中心は原点であり，原点と直線 $2x+y-5=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

円と直線が接するのは $r=d$ のときである。

よって　　$r=\sqrt{5}$

11．中心が $(3,\ 0)$ で，直線 $4x-3y-2=0$ に接する円の方程式を求めよ。

解答　$(x-3)^2+y^2=4$

解説

点 $(3,\ 0)$ と直線 $4x-3y-2=0$ の距離は

$$\frac{|4\cdot3-3\cdot0-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{10}{\sqrt{25}}=2$$

円が直線に接するとき，この円の半径は　2

よって，求める円の方程式は

$$(x-3)^2+y^2=2^2$$

すなわち　　$(x-3)^2+y^2=4$