数学演習（２直線の関係）Ｈ２４．２．１４　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．次の２直線は，平行であるか。また，垂直であるか。

(1)　$y=2x+3$，$y=2x-4$　　(2)　$y=3x+4$，$y=-\frac{1}{3}x+5$

(3)　$x-y+2=0$，$x+y-6=0$　　(4)　$6x-4y+3=0$，$9x-6y+4=0$

２．次のような直線の方程式を，それぞれ求めよ。

(1)　点 $(-1,\ 3)$ を通り，直線 $2x+3y=0$ に平行な直線と垂直な直線

(2)　点 $(3,\ 2)$ を通り，２点 $(-3,\ -2)$，$(5,\ 7)$ を結ぶ線分に平行な直線と垂直な直線

３．点 A $(-2,\ 1)$，直線 $\ell$ ：$2x-3y-4=0$ について

(1)　点 A を通り，$\ell$ に平行な直線の方程式を求めよ。

(2)　点 A を通り，$\ell$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

４．２点 $(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$ を通る直線を $\ell$ とする。

(1)　直線 $\ell$ の方程式を求めよ。

(2)　点 $(2,\ -3)$ を通り，$\ell$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

５．２点 A $(1,\ 2)$，B $(4,\ 1)$ を結ぶ線分の垂直二等分線の方程式を求めよ。

６．次の直線に関して，点 $(-3,\ 5)$ と対称な点の座標を求めよ。

(1)　$y=x$　　(2)　$3x-2y+12=0$

7．次の直線について，与えられた点と対称な点の座標を求めよ。

(1)　$x+y+1=0$，$(3,\ 2)$　　(2)　$3x+2y-6=0$，$(3,\ 1)$

8．次の直線は，定数 $k$ の値に関係なく定点を通る。その定点の座標を求めよ。

(1)　$x+2y-5+k(2x-3y+4)=0$　　(2)　$(2k+1)x+(k+4)y-k+3=0$

9．3 直線 $x-2y+9=0$，$3x+y-1=0$，$ax-y+5=0$ が三角形を作らないとき，定数 $a$ の値を求めよ。

10. 次の点と直線の距離を求めよ。

(1)　$(0,\ 0)$，$4x+3y-12=0$　　(2)　$(2,\ 1)$，$2x+y-3=0$

(3)　$(2,\ -3)$，$y=-3x+4$　　(4)　$(-3,\ 2)$，$2x-3y+6=0$

11. 次のような三角形の面積を求めよ。

(1)　3 点 O$(0,\ 0)$，A$(4,\ 6)$，B$(8,\ 3)$ を頂点とする三角形 OAB

(2)　3 直線 $3x-2y+4=0$，$x+4y+6=0$，$2x+y-2=0$ で作られる三角形

12. 点 A$(2,\ 5)$ から直線 $\ell$：$3x-4y-1=0$ に下ろした垂線と直線 $\ell$ の交点を H とする。また，直線 $\ell$ について，点 A と対称な点を B とする。このとき，H，B の座標を求めよ。

1．次の2直線は，平行であるか。また，垂直であるか。

(1)　$y=2x+3$，$y=2x-4$　　(2)　$y=3x+4$，$y=-\frac{1}{3}x+5$

(3)　$x-y+2=0$，$x+y-6=0$　　(4)　$6x-4y+3=0$，$9x-6y+4=0$

解答　(1)　平行　(2)　垂直　(3)　垂直　(4)　平行

解説

(1)　2直線の傾きがともに2で等しいから，平行である。

(2)　2直線の傾きは，それぞれ3，$-\frac{1}{3}$であり　$3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

ゆえに，2直線は垂直である。

(3)　$x-y+2=0$ から　$y=x+2$　$x+y-6=0$ から　$y=-x+6$

よって，2直線の傾きは，それぞれ1，$-1$であり　$1\times(-1)=-1$

ゆえに，2直線は垂直である。

(4)　$6x-4y+3=0$ から　$y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$

$9x-6y+4=0$ から　$y=\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}$

よって，2直線の傾きがともに$\frac{3}{2}$で等しいから，平行である。

2．次のような直線の方程式を，それぞれ求めよ。

(1)　点$(-1,\ 3)$を通り，直線$2x+3y=0$に平行な直線と垂直な直線

(2)　点$(3,\ 2)$を通り，2点$(-3,\ -2)$，$(5,\ 7)$を結ぶ線分に平行な直線と垂直な直線

解答　(1)　順に $2x+3y-7=0$，$3x-2y+9=0$

(2)　順に $9x-8y-11=0$，$8x+9y-42=0$

解説

(1)　直線$2x+3y=0$の傾きは　$-\frac{2}{3}$

[1]　平行な直線の方程式は

$y-3=-\frac{2}{3}\{x-(-1)\}$　すなわち　$2x+3y-7=0$

[2]　垂直な直線の傾きを $m$ とすると　$-\frac{2}{3}m=-1$　よって　$m=\frac{3}{2}$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$y-3=\frac{3}{2}\{x-(-1)\}$　すなわち　$3x-2y+9=0$

(2)　2点$(-3,\ -2)$，$(5,\ 7)$を結ぶ線分の傾きは　$\frac{7-(-2)}{5-(-3)}=\frac{9}{8}$

[1]　平行な直線の方程式は

$y-2=\frac{9}{8}(x-3)$　すなわち　$9x-8y-11=0$

[2]　垂直な直線の傾きを $m$ とすると　$\frac{9}{8}m=-1$　よって　$m=-\frac{8}{9}$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$y-2=-\frac{8}{9}(x-3)$　すなわち　$8x+9y-42=0$

3．点A$(-2,\ 1)$，直線$\ell$：$2x-3y-4=0$について

(1)　点Aを通り，$\ell$に平行な直線の方程式を求めよ。

(2)　点Aを通り，$\ell$に垂直な直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$2x-3y+7=0$　(2)　$3x+2y+4=0$

解説

直線$\ell$の傾きは$\frac{2}{3}$である。

(1)　求める直線は点$(-2,\ 1)$を通り，傾きが$\frac{2}{3}$であるから，その方程式は

$y-1=\frac{2}{3}(x+2)$　すなわち　$2x-3y+7=0$

(2)　$\ell$に垂直な直線の傾きは$-\frac{3}{2}$であるから，求める直線の方程式は

$y-1=-\frac{3}{2}(x+2)$　すなわち　$3x+2y+4=0$

4．2点$(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$を通る直線を$\ell$とする。

(1)　直線$\ell$の方程式を求めよ。

(2)　点$(2,\ -3)$を通り，$\ell$に垂直な直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$x-2y-6=0$　(2)　$2x+y-1=0$

解説

(1)　$y-(-5)=\frac{1-(-5)}{8-(-4)}\{x-(-4)\}$ から　$y+5=\frac{1}{2}(x+4)$

すなわち　$x-2y-6=0$

(2)　直線$\ell$に垂直な直線の傾きを $m$ とすると　$\frac{1}{2}m=-1$

よって　$m=-2$

したがって，求める直線の方程式は　$y-(-3)=-2(x-2)$

すなわち　$2x+y-1=0$

5．2点A$(1,\ 2)$，B$(4,\ 1)$を結ぶ線分の垂直二等分線の方程式を求めよ。

解答　$3x-y-6=0$

解説

線分ABの中点の座標は　$\left(\frac{1+4}{2},\ \frac{2+1}{2}\right)$　すなわち　$\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

また，直線ABの傾きは　$\frac{1-2}{4-1}=-\frac{1}{3}$

直線ABに垂直な直線の傾きを $m$ とすると

$-\frac{1}{3}m=-1$　ゆえに　$m=3$

よって，求める直線は，点$\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$を通り，傾きが3であるから，その方程式は

$y-\frac{3}{2}=3\left(x-\frac{5}{2}\right)$　すなわち　$3x-y-6=0$

6．次の直線に関して，点$(-3,\ 5)$と対称な点の座標を求めよ。

(1)　$y=x$　　(2)　$3x-2y+12=0$

解答　(1)　$(5,\ -3)$　(2)　$\left(\frac{3}{13},\ \frac{37}{13}\right)$

解説

求める点の座標を$(p,\ q)$とする。

(1)　2点$(-3,\ 5)$，$(p,\ q)$を通る直線と直線$y=x$は垂直であるから，$p\fallingdotseq-3$で

$\frac{q-5}{p+3}\cdot1=-1$

ゆえに　$p+q=2$　…… ①

2点$(-3,\ 5)$，$(p,\ q)$を結ぶ線分の中点$\left(\frac{p-3}{2},\ \frac{q+5}{2}\right)$が直線$y=x$上にあるから

$\frac{q+5}{2}=\frac{p-3}{2}$

ゆえに　$p-q=8$　…… ②

①，②を解いて　$p=5$，$q=-3$

よって，求める点の座標は　$(5,\ -3)$

(2)　2点$(-3,\ 5)$，$(p,\ q)$を通る直線と直線$3x-2y+12=0$は垂直であるから，$p\fallingdotseq-3$

で　$\frac{q-5}{p+3}\cdot\frac{3}{2}=-1$

ゆえに　$2p+3q=9$　…… ①

2点$(-3,\ 5)$，$(p,\ q)$を結ぶ線分の中点$\left(\frac{p-3}{2},\ \frac{q+5}{2}\right)$が直線$3x-2y+12=0$上に

あるから　$3\cdot\frac{p-3}{2}-2\cdot\frac{q+5}{2}+12=0$

ゆえに　$3p-2q=-5$　…… ②

①，②を解いて　$p=\frac{3}{13}$，$q=\frac{37}{13}$

よって，求める点の座標は　$\left(\frac{3}{13},\ \frac{37}{13}\right)$

7. 次の直線について，与えられた点と対称な点の座標を求めよ。

(1)　$x+y+1=0$，$(3,\ 2)$　　　(2)　$3x+2y-6=0$，$(3,\ 1)$

解答　(1)　$(-3,\ -4)$　　(2)　$\left(\dfrac{9}{13},\ -\dfrac{7}{13}\right)$

解説

求める点の座標を $(p,\ q)$ とする。

(1)　2 点 $(3,\ 2)$，$(p,\ q)$ を通る直線が直線 $x+y+1=0$ に垂直であるから

$$\frac{q-2}{p-3}\cdot(-1)=-1$$

すなわち　　$p-q=1$　…… ①

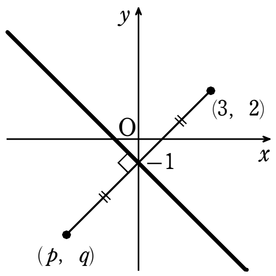
また，2 点 $(3,\ 2)$，$(p,\ q)$ を結ぶ線分の中点が，直線 $x+y+1=0$ 上にあるから

$$\frac{3+p}{2}+\frac{2+q}{2}+1=0$$

すなわち　　$p+q=-7$　…… ②

①，② を連立して解くと　　$p=-3$，$q=-4$

したがって，求める点の座標は　　$(-3,\ -4)$




(2)　2 点 $(3,\ 1)$，$(p,\ q)$ を通る直線が直線 $3x+2y-6=0$ に垂直であるから

$$\frac{q-1}{p-3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$$

すなわち　　$2p-3q=3$　…… ①

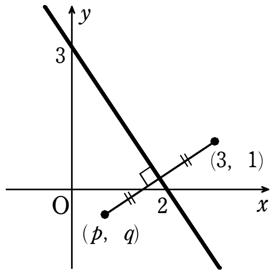
また，2 点 $(3,\ 1)$，$(p,\ q)$ を結ぶ線分の中点が，直線 $3x+2y-6=0$ 上にあるから

$$3\cdot\frac{3+p}{2}+2\cdot\frac{1+q}{2}-6=0$$

すなわち　　$3p+2q=1$　…… ②

①，② を連立して解くと　　$p=\dfrac{9}{13}$，$q=-\dfrac{7}{13}$

したがって，求める点の座標は　　$\left(\dfrac{9}{13},\ -\dfrac{7}{13}\right)$




8. 次の直線は，定数 $k$ の値に関係なく定点を通る。その定点の座標を求めよ。

(1)　$x+2y-5+k(2x-3y+4)=0$　　　(2)　$(2k+1)x+(k+4)y-k+3=0$

解答　(1)　証明略，$(1,\ 2)$　　(2)　証明略，$(1,\ -1)$

解説

(1)　与式を $k$ についての恒等式と考えると　　$x+2y-5=0$，$2x-3y+4=0$

これを解いて　　$x=1$，$y=2$

よって，与えられた直線は定点 $(1,\ 2)$ を通る。

(2)　与式を $k$ について整理すると　　$k(2x+y-1)+x+4y+3=0$

これを $k$ についての恒等式と考えると　　$2x+y-1=0$，$x+4y+3=0$

これを解いて　　$x=1$，$y=-1$

よって，与えられた直線は定点 $(1,\ -1)$ を通る。

9. 3 直線 $x-2y+9=0$，$3x+y-1=0$，$ax-y+5=0$ が三角形を作らないとき，定数 $a$ の値を求めよ。

解答　$a=-3,\ \dfrac{1}{2},\ 1$

解説

$x-2y+9=0$　…… ①，$3x+y-1=0$　…… ②，$ax-y+5=0$　…… ③ とする。

直線 ① の傾きは　$\dfrac{1}{2}$，直線 ② の傾きは　$-3$，直線 ③ の傾きは　$a$

よって，3 直線 ①，②，③ が三角形を作らないとき，次の 2 つの場合がある。

[1]　直線 ③ が直線 ① または直線 ② と平行になる。

直線 ③ が直線 ① と平行になるとき　　$a=\dfrac{1}{2}$

直線 ③ が直線 ② と平行になるとき　　$a=-3$

[2]　3 直線が 1 点で交わる。

①，② を連立して解くと　　$x=-1$，$y=4$

よって，2 直線 ①，② の交点の座標は　　$(-1,\ 4)$

直線 ③ が点 $(-1,\ 4)$ を通るとき　　$a\cdot(-1)-4+5=0$

よって　　$a=1$

以上から，求める $a$ の値は　　$a=-3,\ \dfrac{1}{2},\ 1$

10. 次の点と直線の距離を求めよ。

(1)　$(0,\ 0)$，$4x+3y-12=0$　　　(2)　$(2,\ 1)$，$2x+y-3=0$

(3)　$(2,\ -3)$，$y=-3x+4$　　　(4)　$(-3,\ 2)$，$2x-3y+6=0$

解答　(1)　$\dfrac{12}{5}$　　(2)　$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　(4)　$\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

解説

(1)　$\dfrac{|4\cdot0+3\cdot0-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{12}{5}$

(2)　$\dfrac{|2\cdot2+1-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(3)　$y=-3x+4$ から　　$3x+y-4=0$

よって　　$\dfrac{|3\cdot2-3-4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

(4)　$\dfrac{|2\cdot(-3)-3\cdot2+6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{13}}=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

11. 次のような三角形の面積を求めよ。

(1)　3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 6)$，$\mathrm{B}(8,\ 3)$ を頂点とする三角形 OAB

(2)　3 直線 $3x-2y+4=0$，$x+4y+6=0$，$2x+y-2=0$ で作られる三角形

解答　(1)　18　　(2)　7

解説

(1)　2 点 O，A を通る直線の方程式は

$3x-2y=0$

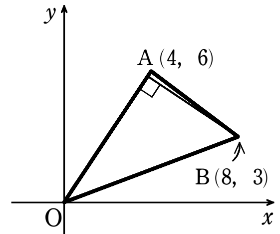
点 B と直線 OA の距離 $h$ は

$$h=\frac{|3\cdot8-2\cdot3|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{18}{\sqrt{13}}$$

また　　$\mathrm{OA}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$

よって，求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{13}\cdot\frac{18}{\sqrt{13}}=18$$




(2)　$3x-2y+4=0$　…… ①，$x+4y+6=0$　…… ②，$2x+y-2=0$　…… ③ とし，直線① と直線 ②，直線 ② と直線 ③，直線 ③ と直線 ① の交点を，それぞれ A，B，C とする。

連立方程式 ①，② を解くと　　$x=-2$，$y=-1$

ゆえに　　　$\mathrm{A}(-2,\ -1)$

同様にして　　$\mathrm{B}(2,\ -2)$，$\mathrm{C}(0,\ 2)$

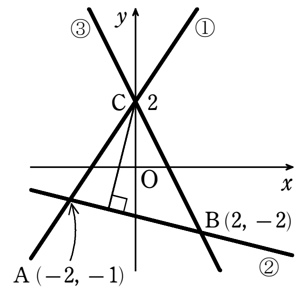
点 C と直線 AB，すなわち，直線 ② との距離 $h$ は

$$h=\frac{|0+4\cdot2+6|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{14}{\sqrt{17}}$$

また　　$\mathrm{AB}=\sqrt{(2+2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{17}$

よって，求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{17}\cdot\frac{14}{\sqrt{17}}=7$$




12. 点 $\mathrm{A}(2,\ 5)$ から直線 $\ell$ ：$3x-4y-1=0$ に下ろした垂線と直線 $\ell$ の交点を H とする。また，直線 $\ell$ について，点 A と対称な点を B とする。このとき，H，B の座標を求めよ。

解答　$\mathrm{H}\left(\dfrac{19}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{28}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

解説

点 H の座標を $(p,\ q)$，点 B の座標を $(s,\ t)$ とする。

2 点 A，H を通る直線が直線 $\ell$ に垂直であるから

$$\frac{q-5}{p-2}\cdot\frac{3}{4}=-1$$

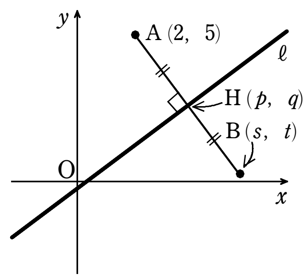
すなわち　　$4p+3q-23=0$　…… ①

また，点 H は直線 $\ell$ 上にあるから

$3p-4q-1=0$　…… ②

①，② を連立して解くと　　$p=\dfrac{19}{5}$，$q=\dfrac{13}{5}$

よって　　$\mathrm{H}\left(\dfrac{19}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$




線分 AB の中点が H であるから　　$\dfrac{2+s}{2}=\dfrac{19}{5}$，$\dfrac{5+t}{2}=\dfrac{13}{5}$

すなわち　　$s=\dfrac{28}{5}$，$t=\dfrac{1}{5}$

よって　　$\mathrm{B}\left(\dfrac{28}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$