数学演習（円の方程式）R１．６．１４　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

1．次のような円の方程式を求めよ。

(1)　中心が $(3,\ -2)$，半径が 4

(2)　点 $(0,\ 3)$ を中心とし，点 $(-1,\ 6)$ を通る

(3)　2 点 $(-3,\ -4)$，$(5,\ 8)$ を直径の両端とする

2．3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 6)$，$\mathrm{B}(1,\ -3)$，$\mathrm{C}(5,\ -1)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の方程式を求めよ。

3．(1)　方程式 $x^2+y^2+5x-3y+6=0$ はどんな図形を表すか。

(2)　方程式 $x^2+y^2+2px+3py+13=0$ が円を表すとき，定数 p の値の範囲を求めよ。

4．次の円の方程式を求めよ。

(1)　x 軸と y 軸の両方に接し，点 $\mathrm{A}(-4,\ 2)$ を通る。

(2)　点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$ を通り，y 軸に接し，中心が直線 $y=2x$ 上にある。

5．(1)　点 $\mathrm{A}(8,\ 6)$ を通り，y 軸と接する円のうちで，半径が最も小さい円の方程式を求めよ。

(2)　3 直線 $x=3$，$y=2$，$3x-4y+11=0$ で囲まれる三角形の内接円の方程式を求めよ。

6．円 $(x+4)^2+(y-1)^2=4$ と直線 $y=ax+3$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

7．直線 $y=x+2$ が円 $x^2+y^2=5$ によって切り取られる弦の長さを求めよ。

8．円 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 上の点 P$(4,\ 6)$ における接線の方程式を求めよ。

9．点 $(2,\ -3)$ から円 $x^2+y^2=10$ に引いた 2 本の接線の 2 つの接点を結ぶ直線の方程式を求めよ。

10. (1) 点 $(2,\ 1)$ を中心とし，直線 $5x+12y+4=0$ に接する円の方程式を求めよ。

(2) 円 $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ に接し，傾きが 2 の直線の方程式を求めよ。

11. 点 P$(-5,\ 10)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式を求めよ。

12. (1) 円 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 上の点 P と定点 A$(-4,\ 4)$ の最短距離を求めよ。

(2) 円 $x^2+y^2=1$ 上の点 P と直線 $16x-12y=25$ 上の点 Q との距離 PQ の最小値を求めよ。

数学演習（円の方程式）R１．６．１４　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

1． 次のような円の方程式を求めよ。

(1) 中心が $(3,\ -2)$，半径が 4

(2) 点 $(0,\ 3)$ を中心とし，点 $(-1,\ 6)$ を通る

(3) 2 点 $(-3,\ -4)$，$(5,\ 8)$ を直径の両端とする

解答 (1) $(x-3)^2+(y+2)^2=16$　(2) $x^2+(y-3)^2=10$

(3) $(x-1)^2+(y-2)^2=52$

解説

(1) $(x-3)^2+(y+2)^2=16$

(2) この円の半径 r は，中心 $(0,\ 3)$ と点 $(-1,\ 6)$ の距離であるから

$$r^2=(-1-0)^2+(6-3)^2=10$$

よって，求める円の方程式は　$x^2+(y-3)^2=10$

(3) この円の中心は 2 点 $(-3,\ -4)$，$(5,\ 8)$ を結ぶ線分の中点で

$$\left(\frac{-3+5}{2},\ \frac{-4+8}{2}\right)$$ すなわち　$(1,\ 2)$

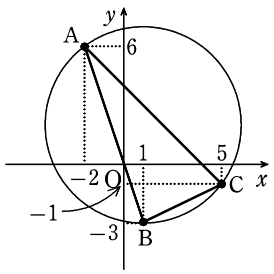
半径 r は中心 $(1,\ 2)$ と点 $(5,\ 8)$ の距離で　$r^2=(5-1)^2+(8-2)^2=52$

よって，求める円の方程式は　$(x-1)^2+(y-2)^2=52$

2． 3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 6)$，$\mathrm{B}(1,\ -3)$，$\mathrm{C}(5,\ -1)$ を頂点とする △ABC の外接円の方程式を求めよ。

解答 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$

解説



求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

この円が，$\mathrm{A}(-2,\ 6)$ を通るから

$$(-2)^2+6^2-2l+6m+n=0$$

$\mathrm{B}(1,\ -3)$ を通るから

$$1^2+(-3)^2+l-3m+n=0$$

$\mathrm{C}(5,\ -1)$ を通るから

$$5^2+(-1)^2+5l-m+n=0$$

これらを整理して　$2l-6m-n=40$，

$l-3m+n=-10$，

$5l-m+n=-26$

これを解いて　$l=-2$，$m=-4$，$n=-20$

よって　$x^2+y^2-2x-4y-20=0$

3． (1) 方程式 $x^2+y^2+5x-3y+6=0$ はどんな図形を表すか。

(2) 方程式 $x^2+y^2+2px+3py+13=0$ が円を表すとき，定数 p の値の範囲を求めよ。

解答 (1) 中心 $\left(-\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$，半径 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ の円　(2) $p<-2,\ 2<p$

解説

(1) $\left\{x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}+\left\{y^2-3y+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}=-6+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$

ゆえに　$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$

よって　中心 $\left(-\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$，半径 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ の円

(2) $(x^2+2px+p^2)+\left\{y^2+3py+\left(\frac{3}{2}p\right)^2\right\}=-13+p^2+\left(\frac{3}{2}p\right)^2$

したがって　$(x+p)^2+\left(y+\frac{3}{2}p\right)^2=\frac{13}{4}p^2-13$

この方程式が円を表すための条件は　$\frac{13}{4}p^2-13>0$

ゆえに　$p^2-4>0$　　よって　$p<-2,\ 2<p$

4． 次の円の方程式を求めよ。

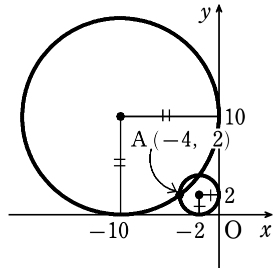
(1) x 軸と y 軸の両方に接し，点 $\mathrm{A}(-4,\ 2)$ を通る。

(2) 点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$ を通り，y 軸に接し，中心が直線 $y=2x$ 上にある。

解答 (1) $(x+2)^2+(y-2)^2=4$，$(x+10)^2+(y-10)^2=100$

(2) $(x-1)^2+(y-2)^2=1$，$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$

解説



(1) x 軸と y 軸の両方に接し，点 $\mathrm{A}(-4,\ 2)$ を通るから，中心は $t>0$ として，$(-t,\ t)$ とおくことができる。

また，半径は t であるから，円の方程式は

$$(x+t)^2+(y-t)^2=t^2 \quad \cdots\cdots ①$$

点 $\mathrm{A}(-4,\ 2)$ を通るから，$x=-4$，$y=2$ を代入して

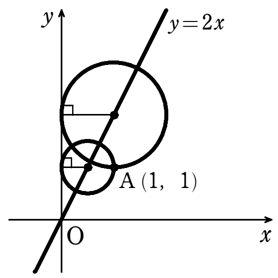
$$(-4+t)^2+(2-t)^2=t^2$$

整理して　$t^2-12t+20=0$

ゆえに　$(t-2)(t-10)=0$　　よって　$t=2,\ 10$

これを ① に代入して，求める円の方程式は

$$(x+2)^2+(y-2)^2=4,\ (x+10)^2+(y-10)^2=100$$



(2) 中心は直線 $y=2x$ 上にあるから，その座標は $(t,\ 2t)$ と表される。

また，円は y 軸に接するから，円の半径は中心の x 座標の絶対値に等しい。よって，円の方程式は

$$(x-t)^2+(y-2t)^2=|t|^2 \quad \cdots\cdots ①$$

点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$ を通るから，$x=1$，$y=1$ を代入して

$$(1-t)^2+(1-2t)^2=t^2$$

整理して　$2t^2-3t+1=0$

ゆえに　$(t-1)(2t-1)=0$　　よって　$t=1,\ \frac{1}{2}$

これを ① に代入して，求める円の方程式は

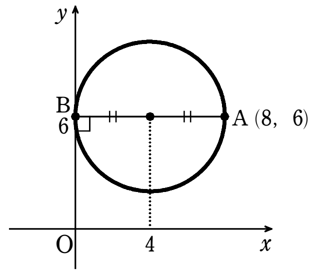
$$(x-1)^2+(y-2)^2=1,\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$$

5． (1) 点 $\mathrm{A}(8,\ 6)$ を通り，y 軸と接する円のうちで，半径が最も小さい円の方程式を求めよ。

(2) 3 直線 $x=3$，$y=2$，$3x-4y+11=0$ で囲まれる三角形の内接円の方程式を求めよ。

解答 (1) $(x-4)^2+(y-6)^2=16$　(2) $(x-2)^2+(y-3)^2=1$

解説



(1) 点 A から y 軸に下ろした垂線と y 軸との交点を B とすると，線分 AB を直径とする円が求める円である。

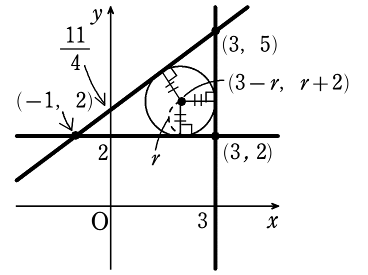
この円の中心は，2 点 A，$\mathrm{B}(0,\ 6)$ を結ぶ線分の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{8+0}{2},\ \frac{6+6}{2}\right)$$ すなわち　$(4,\ 6)$

半径は，中心 $(4,\ 6)$ と点 $\mathrm{B}(0,\ 6)$ との距離で　4

よって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y-6)^2=16$$



(2) $3x-4y+11=0$ に $x=3$ を代入して　$y=5$

$3x-4y+11=0$ に $y=2$ を代入して　$x=-1$

よって，三角形の頂点の座標は

$(-1,\ 2)$，$(3,\ 2)$，$(3,\ 5)$

ゆえに，求める円の半径を r とすると，中心の座標は $(3-r,\ r+2)$ と表され

$-1<3-r<3$　かつ　$2<r+2<5$

が成り立つ。これを解いて　$0<r<3$

直線 $3x-4y+11=0$ と円の中心の距離は，円の半径に等しいから

$$\frac{|3(3-r)-4(r+2)+11|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=r$$

よって　$|12-7r|=5r$　すなわち　$12-7r=\pm 5r$

$12-7r=5r$ から　$r=1$　　$12-7r=-5r$ から　$r=6$

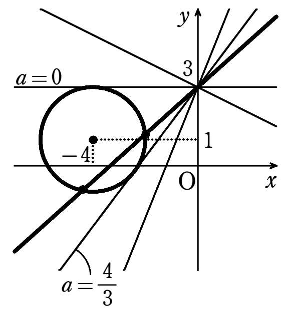
$0<r<3$ を満たすものは　$r=1$　　このとき，中心の座標は　$(2,\ 3)$

求める円の方程式は　$(x-2)^2+(y-3)^2=1$

6． 円 $(x+4)^2+(y-1)^2=4$ と直線 $y=ax+3$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答 $0<a<\frac{4}{3}$

解説



[解法 1]　$y=ax+3$ を円の方程式に代入して

$$(x+4)^2+(ax+2)^2=4$$

整理すると　$(a^2+1)x^2+4(a+2)x+16=0$

判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{2(a+2)\}^2-16(a^2+1)$$

$$=4\{a^2+4a+4-4(a^2+1)\}$$

$$=-4a(3a-4)$$

円と直線が異なる 2 点で交わるための条件は

$D>0$

ゆえに　$-4a(3a-4)>0$　　よって　$0<a<\frac{4}{3}$

[解法 2]　円の半径は 2 である。円の中心 $(-4,\ 1)$ と直線の距離を d とすると，異なる 2 点で交わるための条件は　$d<2$

$d=\frac{|a\cdot(-4)-1+3|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}$ であるから　$\frac{|-4a+2|}{\sqrt{a^2+1}}<2$

両辺に正の数 $\sqrt{a^2+1}$ を掛けて　$|-4a+2|<2\sqrt{a^2+1}$

両辺は負でないから平方して　$(-4a+2)^2<4(a^2+1)$

整理して　$4a(3a-4)<0$　　よって　$0<a<\frac{4}{3}$

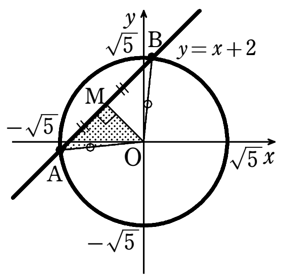
7．直線 $y=x+2$ が円 $x^2+y^2=5$ によって切り取られる弦の長さを求めよ。

解答　$2\sqrt{3}$

解説

円の中心 $(0,\ 0)$ を O とする。

また，円と直線の交点をA，Bとし，線分 AB の中点を M とすると



$$OM=\frac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

$OA=\sqrt{5}$ であるから

$$AB=2AM=2\sqrt{OA^2-OM^2}$$
$$=2\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$$

別解　$y=x+2$，$x^2+y^2=5$ から y を消去して

$$x^2+(x+2)^2=5$$

整理すると　$2x^2+4x-1=0$　……①

円と直線の交点の座標を $(\alpha,\ \alpha+2)$，$(\beta,\ \beta+2)$ とすると，α，β は2次方程式①の解であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

求める線分の長さを l とすると

$$l^2=(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+2)-(\alpha+2)\}^2=2(\beta-\alpha)^2$$
$$=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=2\left\{(-2)^2-4\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=12$$

したがって，求める線分の長さは　$l=2\sqrt{3}$

8．円 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 上の点 P$(4,\ 6)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$3x+4y=36$

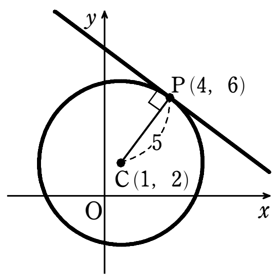
解説

[解法1]　$(4-1)(x-1)+(6-2)(y-2)=25$

よって　$3x+4y=36$

[解法2]　円の中心を C$(1,\ 2)$ とする。

求める接線は，点 P を通り，半径 CP に垂直な直線である。



直線 CP の傾きは $\frac{4}{3}$ であるから，求める接線の方程式は　$y-6=-\frac{3}{4}(x-4)$　すなわち　$3x+4y=36$

[解法3]　点 P における接線は x 軸に垂直でないから，接線の方程式は

$y-6=m(x-4)$　すなわち　$mx-y-4m+6=0$　……①

と表される。円の中心 $(1,\ 2)$ と直線①の距離が円の半径5に等しいから

$$\frac{|m\cdot1-2-4m+6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5$$　ゆえに　$|-3m+4|=5\sqrt{m^2+1}$

両辺を平方して　$(-3m+4)^2=25(m^2+1)$

整理すると　$(4m+3)^2=0$　　よって　$m=-\frac{3}{4}$

これを①に代入して整理すると　$3x+4y=36$

[解法4]　①：$y=mx-4m+6$ を円の方程式に代入して整理すると

$$(m^2+1)x^2-2(4m^2-4m+1)x+8(2m^2-4m-1)=0$$

判別式 D は　$\frac{D}{4}=(4m^2-4m+1)^2-8(m^2+1)(2m^2-4m-1)$

$$=16m^4+16m^2+1-32m^3-8m+8m^2$$
$$-8(2m^4-4m^3-m^2+2m^2-4m-1)$$
$$=16m^2+24m+9=(4m+3)^2$$

直線①と円が接するための条件は　$D=0$

したがって　$(4m+3)^2=0$　　よって　$m=-\frac{3}{4}$

これを①に代入して整理すると　$3x+4y=36$

9．点 $(2,\ -3)$ から円 $x^2+y^2=10$ に引いた2本の接線の2つの接点を結ぶ直線の方程式を求めよ。

解答　$2x-3y=10$

解説

(1)　2つの接点を P$(p,\ q)$，Q$(p',\ q')$ とすると，接線の方程式は，それぞれ

$$px+qy=10,\ p'x+q'y=10$$

点 $(2,\ -3)$ を通るから，それぞれ

$$2p-3q=10,\ 2p'-3q'=10$$

を満たし，これは2点 P$(p,\ q)$，Q$(p',\ q')$ が直線 $2x-3y=10$ 上にあることを示している。

したがって，求める直線の方程式は　$2x-3y=10$

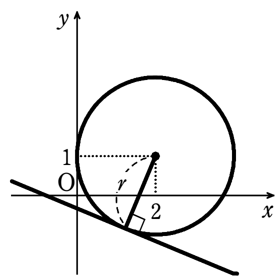
10．(1)　点 $(2,\ 1)$ を中心とし，直線 $5x+12y+4=0$ に接する円の方程式を求めよ。

(2)　円 $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ に接し，傾きが2の直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$(x-2)^2+(y-1)^2=4$　　(2)　$y=2x\pm3\sqrt{5}$

解説

(1)　求める円の方程式は，半径を r とすると



$$(x-2)^2+(y-1)^2=r^2\quad ……①$$

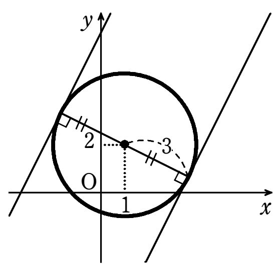
円①が直線 $5x+12y+4=0$ ……② に接するための条件は，円の中心 $(2,\ 1)$ と直線②との距離が円の半径に等しいことであるから

$$r=\frac{|5\cdot2+12\cdot1+4|}{\sqrt{5^2+12^2}}=2$$

よって，求める円の方程式は

$$(x-2)^2+(y-1)^2=4$$

(2)　円の方程式を変形すると



$$(x-1)^2+(y-2)^2=3^2\quad ……①$$

また，求める直線の傾きは2であるから，その方程式を　$y=2x+n$　……②

すなわち，$2x-y+n=0$ とする。

直線②が円①に接するための条件は，円の中心 $(1,\ 2)$ と直線②の距離が円の半径3に等しいことである。

したがって　$\frac{|2\cdot1-2+n|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=3$

よって　$|n|=3\sqrt{5}$　すなわち　$n=\pm3\sqrt{5}$

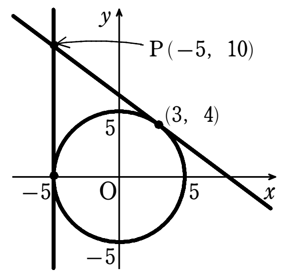
これを②に代入して，求める直線の方程式は　$y=2x\pm3\sqrt{5}$

11．点 P$(-5,\ 10)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式を求めよ。

解答　$x=-5$，$3x+4y=25$

解説

接点を Q$(x_1,\ y_1)$ とすると



$$x_1^2+y_1^2=25\quad ……①$$

点 Q における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=25\quad ……②$$

この直線が点 P$(-5,\ 10)$ を通るから

$$-5x_1+10y_1=25$$

ゆえに　$x_1=2y_1-5$　……③

①に代入して　$(2y_1-5)^2+y_1^2=25$

整理して　$y_1^2-4y_1=0$　　ゆえに　$y_1=0,\ 4$

③から　$y_1=0$ のとき　$x_1=-5$，　$y_1=4$ のとき　$x_1=3$

よって，接線の方程式は，②から　$x=-5$，$3x+4y=25$

別解　[1]　点 P を通り，x 軸に垂直な直線 $x=-5$ は，円 $x^2+y^2=25$ の接線である。

[2]　点 P を通り，x 軸に垂直でない，傾き m の直線の方程式は

$y-10=m(x+5)$　すなわち　$mx-y+5m+10=0$　……①

直線①が円 $x^2+y^2=25$ に接するための条件は，円の中心 $(0,\ 0)$ と直線①の距離が円の半径5に等しいことである。

よって　$\frac{|5m+10|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5$　すなわち　$\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

分母を払って　$|m+2|=\sqrt{m^2+1}$

両辺を平方して　$(m+2)^2=m^2+1$

整理して　$4m+3=0$　　これを解いて　$m=-\frac{3}{4}$

これを①に代入して整理すると　$3x+4y=25$

以上から，求める接線の方程式は　$x=-5$，$3x+4y=25$

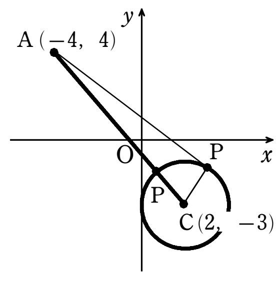
12．(1)　円 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 上の点 P と定点 A$(-4,\ 4)$ の最短距離を求めよ。

(2)　円 $x^2+y^2=1$ 上の点 P と直線 $16x-12y=25$ 上の点 Q との距離 PQ の最小値を求めよ。　解答　(1)　$\sqrt{85}-2$　　(2)　$\frac{1}{4}$

解説

(1)　円の中心を C とする。

点 A は円の外側にあるから　AP＋CP≧AC



等号が成り立つのは，線分 AC 上に点 P があるときである。

CP＝2（円の半径），

$$AC=\sqrt{(2+4)^2+(-3-4)^2}=\sqrt{85}$$

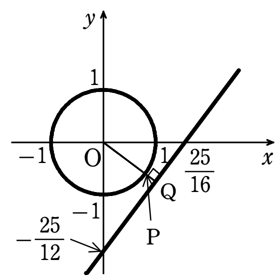
であるから

$$AP\geqq AC-CP=\sqrt{85}-2$$

よって，求める最短距離は　$\sqrt{85}-2$

(2)　円の中心を O とする。

与えられた円と直線は共有点をもたないから，点 Q は円の外側にあり　OP＋PQ≧OQ



OP＝1 であるから　PQ≧OQ－1

よって，線分 PQ の長さが最小となるのは，線分 OQ の長さが最小となるときである。

点 O と直線 $16x-12y=25$ の距離を d とすると

$$d=\frac{|-25|}{\sqrt{16^2+(-12)^2}}=\frac{25}{20}=\frac{5}{4}$$

よって，求める距離 PQ の最小値は

$$d-1=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$$