

1. 次の方程式を解け。

$$(1) \quad (x+1)(x-1)(x-5)=0$$

$$(2) \quad (x+2)(x+3)(2x-5)=0$$

$$(3) \quad x^3 - 4x^2 + 6x = 0$$

$$(4) \quad (x-1)(x^2+2x-5)=0$$

2. 次の方程式を解け。

(1)  $x^3 = -8$

$$(2) \quad x^3 = 27$$

$$(3) \quad 16x^4 = 1$$

$$(4) \quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$(5) \quad x^4 + 4x^2 - 5 = 0$$

$$(6) \quad x^4 - 4x^2 - 12 = 0$$

3. 次の方程式を解け。

$$(1) \quad (x+1)(x+3)(x+5)=48$$

$$(2) \quad x^3 + 4x^2 - x - 22 = 0$$

4. 次の方程式を解け。

$$(1) \quad x^3 - 13x + 12 = 0$$

$$(2) \quad x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$$

$$(3) \quad x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$(4) \quad x^3 + 5x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$(5) \quad 8x^3 + 4x - 3 = 0$$

$$(6) \quad 3x^3 - 8x^2 + 1 = 0$$

5. 方程式  $x^3 + ax^2 - x - 6 = 0$  の 1 つの解が 2 であるとき、定数  $a$  の値を求めよ。また、その他の解を求めよ。

6. 方程式  $x^3+ax^2+bx-6=0$  の 2 つの解を  $-1, 2$  とするとき、定数  $a, b$  の値と他の解を求めよ。

7. 方程式  $x^3+ax^2+bx+10=0$  の 1 つの解が  $1+2i$  であるとき、実数の定数  $a$ ,  $b$  の値と他の解を求めよ。

8.  $x$  の多項式  $ax^3+11x^2+bx-4$  が  $(x+2)^2$  で割り切れるとき、定数  $a$ ,  $b$  の値を求めよ。

9. 3 次方程式  $x^3-(a+3)x^2+9a=0$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $x=3$  を解にもつことを示せ。
- (2) この方程式が 3 を 2 重解としてもつように、定数  $a$  の値を定めよ。
- (3) この方程式が 3 以外の解を 2 重解としてもつように、定数  $a$  の値を定めよ。

10. 3 次方程式  $x^3+3x^2+(a-4)x-a=0$  の異なる解が 2 つであるように、定数  $a$  の値を定めよ。

11.  $x$  の方程式  $x^3-3x^2+ax+2-a=0$  について、方程式が異なる 3 つの実数解をもつとき、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。

12.  $x=1-\sqrt{2}i$  のとき、 $x^4-4x^3+2x^2-3x-1$  の値を求めよ。

1. 次の方程式を解け。

- (1)  $(x+1)(x-1)(x-5)=0$
- (2)  $(x+2)(x+3)(2x-5)=0$
- (3)  $x^3-4x^2+6x=0$
- (4)  $(x-1)(x^2+2x-5)=0$

**【解答】** (1)  $x=-1, 1, 5$  (2)  $x=-3, -2, \frac{5}{2}$  (3)  $x=0, 2\pm\sqrt{2}i$   
(4)  $x=1, -1\pm\sqrt{6}$

**【解説】**

- (1)  $x+1=0$  または  $x-1=0$  または  $x-5=0$   
よって  $x=-1, 1, 5$
- (2)  $x+2=0$  または  $x+3=0$  または  $2x-5=0$

よって  $x=-3, -2, \frac{5}{2}$

- (3) 左辺を因数分解して  $x(x^2-4x+6)=0$   
ゆえに  $x=0$  または  $x^2-4x+6=0$   
 $x^2-4x+6=0$  から  $x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 6}=2\pm\sqrt{2}i$   
よって  $x=0, 2\pm\sqrt{2}i$
- (4)  $x-1=0$  または  $x^2+2x-5=0$   
 $x^2+2x-5=0$  から  $x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-5)}=-1\pm\sqrt{6}$   
よって  $x=1, -1\pm\sqrt{6}$

2. 次の方程式を解け。

- (1)  $x^3=-8$
- (2)  $x^3=27$
- (3)  $16x^4=1$
- (4)  $x^4-10x^2+9=0$
- (5)  $x^4+4x^2-5=0$
- (6)  $x^4-4x^2-12=0$

**【解答】** (1)  $x=-2, 1\pm\sqrt{3}i$  (2)  $x=3, \frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$  (3)  $x=\pm\frac{1}{2}i, \pm\frac{1}{2}$   
(4)  $x=\pm 1, \pm 3$  (5)  $x=\pm 1, \pm\sqrt{5}i$  (6)  $x=\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{2}i$

**【解説】**

- (1) 方程式は  $x^3+8=0$   
左辺を因数分解して  $(x+2)(x^2-2x+4)=0$   
ゆえに  $x+2=0$  または  $x^2-2x+4=0$   
 $x^2-2x+4=0$  から  $x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot 4}=1\pm\sqrt{3}i$   
よって  $x=-2, 1\pm\sqrt{3}i$
- (2) 方程式は  $x^3-27=0$   
左辺を因数分解して  $(x-3)(x^2+3x+9)=0$   
ゆえに  $x-3=0$  または  $x^2+3x+9=0$   
 $x^2+3x+9=0$  から  $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2}=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$   
よって  $x=3, \frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$
- (3) 方程式は  $16x^4-1=0$   
左辺を因数分解して  $(4x^2+1)(4x^2-1)=0$   
ゆえに  $4x^2+1=0$  または  $4x^2-1=0$   
すなわち  $x^2=-\frac{1}{4}$  または  $x^2=\frac{1}{4}$   
よって  $x=\pm\frac{1}{2}i, \pm\frac{1}{2}$
- (4) 左辺を因数分解して  $(x^2-1)(x^2-9)=0$

- ゆえに  $x^2-1=0$  または  $x^2-9=0$   
よって  $x=\pm 1, \pm 3$
- (5) 左辺を因数分解して  $(x^2-1)(x^2+5)=0$   
ゆえに  $x^2-1=0$  または  $x^2+5=0$   
よって  $x=\pm 1, \pm\sqrt{5}i$
- (6) 左辺を因数分解して  $(x^2+2)(x^2-6)=0$   
ゆえに  $x^2+2=0$  または  $x^2-6=0$   
よって  $x=\pm\sqrt{2}i, \pm\sqrt{6}$

3. 次の方程式を解け。

- (1)  $(x+1)(x+3)(x+5)=48$
- (2)  $x^3+4x^2-x-22=0$

**【解答】** (1)  $x=1, -5\pm2\sqrt{2}i$  (2)  $x=2, -3\pm\sqrt{2}i$

**【解説】**

- (1)  $P(x)=(x+1)(x+3)(x+5)-48$  とすると  
 $P(x)$  の右辺を展開して整理すると  $P(x)=x^3+9x^2+23x-33$   
 $P(1)=1+9+23-33=0$  より  
 $P(x)$  は  $x-1$  で割り切れるから割り算をすると  $P(x)=(x-1)(x^2+10x+33)$   
 $P(x)=0$  から  $x-1=0$  または  $x^2+10x+33=0$   
 $x^2+10x+33=0$  から  $x=-5\pm\sqrt{5^2-1\cdot 33}=-5\pm2\sqrt{2}i$   
したがって  $x=1, -5\pm2\sqrt{2}i$
- (2)  $P(x)=x^3+4x^2-x-22$  とすると  $P(2)=2^3+4\cdot 2^2-2-22=0$   
よって、 $P(x)$  は  $x-2$  で割り切れるから割り算をすると  
 $P(x)=(x-2)(x^2+6x+11)$   
 $P(x)=0$  から  $x-2=0$  または  $x^2+6x+11=0$   
 $x^2+6x+11=0$  から  $x=-3\pm\sqrt{3^2-1\cdot 11}=-3\pm\sqrt{2}i$   
したがって  $x=2, -3\pm\sqrt{2}i$

4. 次の方程式を解け。

- (1)  $x^3-13x+12=0$
- (2)  $x^3+6x^2+11x+6=0$
- (3)  $x^3+x^2+2x-4=0$
- (4)  $x^3+5x^2+3x-1=0$
- (5)  $8x^3+4x-3=0$
- (6)  $3x^3-8x^2+1=0$

**【解答】** (1)  $x=1, 3, -4$  (2)  $x=-1, -2, -3$  (3)  $x=1, -1\pm\sqrt{3}i$   
(4)  $x=-1, -2\pm\sqrt{5}$  (5)  $x=\frac{1}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{11}i}{4}$  (6)  $x=-\frac{1}{3}, \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

**【解説】**

- (1)  $P(x)=x^3-13x+12$  とすると  $P(1)=1^3-13\cdot 1+12=0$   
よって、 $P(x)$  は  $x-1$  で割り切れるから割り算をすると  
 $P(x)=(x-1)(x^2+x-12)=(x-1)(x-3)(x+4)$   
 $P(x)=0$  から  $x-1=0$  または  $x-3=0$  または  $x+4=0$   
したがって  $x=1, 3, -4$
- (2)  $P(x)=x^3+6x^2+11x+6$  とすると  $P(-1)=(-1)^3+6(-1)^2+11(-1)+6=0$   
よって、 $P(x)$  は  $x+1$  で割り切れるから割り算をすると  
 $P(x)=(x+1)(x^2+5x+6)=(x+1)(x+2)(x+3)$   
 $P(x)=0$  から  $x+1=0$  または  $x+2=0$  または  $x+3=0$   
したがって  $x=-1, -2, -3$
- (3)  $P(x)=x^3+x^2+2x-4$  とすると  $P(1)=1^3+1^2+2\cdot 1-4=0$   
よって、 $P(x)$  は  $x-1$  で割り切れるから割り算をすると  
 $P(x)=(x-1)(x^2+2x+4)$

- $P(x)=0$  から  $x-1=0$  または  $x^2+2x+4=0$   
 $x^2+2x+4=0$  から  $x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot 4}=-1\pm\sqrt{3}i$   
したがって  $x=1, -1\pm\sqrt{3}i$
- (4)  $P(x)=x^3+5x^2+3x-1$  とすると  $P(-1)=(-1)^3+5(-1)^2+3(-1)-1=0$   
よって、 $P(x)$  は  $x+1$  で割り切れるから割り算をすると  
 $P(x)=(x+1)(x^2+4x-1)$   
 $P(x)=0$  から  $x+1=0$  または  $x^2+4x-1=0$   
 $x^2+4x-1=0$  から  $x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot(-1)}=-2\pm\sqrt{5}$   
したがって  $x=-1, -2\pm\sqrt{5}$

- (5)  $P(x)=8x^3+4x-3$  とすると  $P\left(\frac{1}{2}\right)=8\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\cdot\frac{1}{2}-3=0$

よって、 $P(x)$  は  $2x-1$  で割り切れるから割り算をすると  
 $P(x)=(2x-1)(4x^2+2x+3)$

$P(x)=0$  から  $2x-1=0$  または  $4x^2+2x+3=0$   
 $4x^2+2x+3=0$  から  $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 3}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{4}$

したがって  $x=\frac{1}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{11}i}{4}$

- (6)  $P(x)=3x^3-8x^2+1$  とすると  $P\left(-\frac{1}{3}\right)=3\left(-\frac{1}{3}\right)^3-8\left(-\frac{1}{3}\right)^2+1=0$

よって、 $P(x)$  は  $3x+1$  で割り切れるから割り算をすると  
 $P(x)=(3x+1)(x^2-3x+1)$

$P(x)=0$  から  $3x+1=0$  または  $x^2-3x+1=0$

$x^2-3x+1=0$  から  $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

したがって  $x=-\frac{1}{3}, \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

5. 方程式  $x^3+ax^2-x-6=0$  の1つの解が2であるとき、定数  $a$  の値を求めよ。また、その他の解を求めよ。

**【解答】**  $a=0$ , 他の解  $x=-1\pm\sqrt{2}i$

**【解説】**

$x=2$  がこの方程式の解であるから  $2^3+a\cdot 2^2-2-6=0$

ゆえに  $4a=0$  よって  $a=0$

このとき、方程式は  $x^3-x-6=0$

左辺は  $x-2$  で割り切れるから、これを因数分解すると

$$(x-2)(x^2+2x+3)=0$$

したがって、他の解は  $x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot 3}=-1\pm\sqrt{2}i$

6. 方程式  $x^3+ax^2+bx-6=0$  の2つの解を  $-1, 2$  とするとき、定数  $a, b$  の値と他の解を求めよ。

**【解答】**  $a=2, b=-5$ , 他の解  $x=-3$

**【解説】**

$x=-1, 2$  が解であるから

$$(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)-6=0, 2^3+a\cdot 2^2+b\cdot 2-6=0$$

整理すると  $a-b=7, 2a+b=-1$

これを解いて  $a=2, b=-5$

このとき、方程式は  $x^3+2x^2-5x-6=0$

左辺は  $x+1$ ,  $x-2$  を因数にもつから、これを因数分解すると

$$(x+1)(x-2)(x+3)=0$$

したがって、他の解は  $x=-3$

**別解** 他の解を  $x=\alpha$  とおくと、条件から、次の等式が成り立つ。

$$x^3+ax^2+bx-6=(x+1)(x-2)(x-\alpha)$$

右辺を展開して整理すると

$$x^3+ax^2+bx-6=x^3-(\alpha+1)x^2+(\alpha-2)x+2\alpha$$

両辺の係数を比較すると

$$a=-\alpha-1, \quad b=\alpha-2, \quad -6=2\alpha$$

これを解いて  $\alpha=-3, \quad a=2, \quad b=-5$

7. 方程式  $x^3+ax^2+bx+10=0$  の1つの解が  $1+2i$  であるとき、実数の定数  $a, b$  の値と他の解を求めよ。

**解答**  $a=0, \quad b=1$ , 他の解  $x=-2, \quad 1-2i$

**解説**

$1+2i$  が解であるから

$$(1+2i)^3+a(1+2i)^2+b(1+2i)+10=0$$

ゆえに  $-11-2i+a(-3+4i)+b(1+2i)+10=0$

よって  $(-3a+b-1)+2(2a+b-1)i=0$

$a, b$  は実数であるから  $-3a+b-1=0, \quad 2a+b-1=0$

これを解いて  $a=0, \quad b=1$

このとき、方程式は  $x^3+x+10=0$

左辺を因数分解すると  $(x+2)(x^2-2x+5)=0$

これを解いて  $x=-2, \quad 1\pm 2i$

したがって、他の解は  $x=-2, \quad 1-2i$

**参考** 係数が実数である方程式が虚数解  $a+bi$  をもつと、その共役な複素数  $a-bi$  も、この方程式の解である。本問の場合、 $1+2i$  が解であるから、それと共役な複素数  $1-2i$  もこの方程式の解である。

8.  $x$  の多項式  $ax^3+11x^2+bx-4$  が  $(x+2)^2$  で割り切れるとき、定数  $a, b$  の値を求めよ。

**解答**  $a=3, \quad b=8$

**解説**

$P(x)=ax^3+11x^2+bx-4$  とおく。 $P(x)$ が $(x+2)^2$ で割り切れるので、 $P(x)$ は $(x+2)$ で2回割り切れる。

$P(x)$  は  $x+2$  で割り切れるから、 $x=-2$ を代入すると計算結果は0になる

つまり  $P(-2)=0$  ゆえに  $a(-2)^3+11(-2)^2+b(-2)-4=0$

よって  $b=-4(a-5)$  …… ① これを代入すると

$$P(x)=ax^3+11x^2-4(a-5)x-4$$

よって、 $P(x)$ を $x+2$ で割ると

$$\begin{array}{r} ax^2+(11-2a)x-2 \\ x+2 \overline{) ax^3+11x^2-4(a-5)x-4} \\ \underline{ax^3+2ax^2} \phantom{-4} \\ (11-2a)x^2-4(a-5)x \\ \underline{(11-2a)x^2+2(11-2a)x} \\ -2x-4 \\ \underline{-2x-4} \\ 0 \end{array}$$

よって  $P(x)=(x+2)\{ax^2+(11-2a)x-2\}$

$Q(x)=ax^2+(11-2a)x-2$  とおくと、 $Q(x)$  は  $x+2$  で割り切れるから  $Q(-2)=0$

ゆえに  $a(-2)^2+(11-2a)\cdot(-2)-2=0$  整理して  $8a-24=0$

よって  $a=3$  ①に代入して  $b=8$

9. 3次方程式  $x^3-(a+3)x^2+9a=0$  について、次の問いに答えよ。

(1)  $x=3$  を解にもつことを示せ。

(2) この方程式が3を2重解としてもつように、定数  $a$  の値を定めよ。

(3) この方程式が3以外の解を2重解としてもつように、定数  $a$  の値を定めよ。

**解答** (1) 略 (2)  $a=\frac{3}{2}$  (3)  $a=0, \quad -12$

**解説**

(1) 方程式の左辺に  $x=3$  を代入すると

$$3^3-(a+3)\cdot 3^2+9a=27-9a-27+9a=0$$

したがって、方程式は  $x=3$  を解にもつ。

(2) 方程式の左辺は $x-3$ で割り切れる。割り算をして

因数分解すると  $(x-3)(x^2-ax-3a)=0$

よって  $x-3=0$  または  $x^2-ax-3a=0$  …… ①

題意を満たすための条件は、次の [1], [2] が成り立つことである。

[1] 2次方程式①が  $x=3$  を解にもつ。

[2] 2次方程式①が重解をもたない。

[1]から  $3^2-a\cdot 3-3a=0$  整理して  $9-6a=0$  よって  $a=\frac{3}{2}$

また、2次方程式①の判別式は  $D=(-a)^2-4(-3a)=a^2+12a=a(a+12)$

$a=\frac{3}{2}$  のとき、 $D\neq 0$  であるから、[2]を満たす。

したがって、求める  $a$  の値は  $a=\frac{3}{2}$

(3) 題意を満たすための条件は、2次方程式①が3以外の重解をもつことである。

$D=0$  から  $a(a+12)=0$  よって  $a=0, \quad -12$

①の重解は、 $a=0$  のとき  $x^2=0$  より  $x=0$ ,

$a=-12$  のとき  $x^2+12x+36=0$  より  $x=-6$

となるから、条件を満たす。

したがって、求める  $a$  の値は  $a=0, \quad -12$

10. 3次方程式  $x^3+3x^2+(a-4)x-a=0$  の異なる解が2つであるように、定数  $a$  の値を定めよ。

**解答**  $a=-5, \quad 4$

**解説**

$x^3+3x^2+(a-4)x-a$  に $x=1$ を代入すると0になるので、

$x^3+3x^2+(a-4)x-a$  は  $x-1$  で割り切れる。割り算をして因数分解すると

よって、方程式は  $(x-1)(x^2+4x+a)=0$

ゆえに  $x-1=0$  または  $x^2+4x+a=0$  …… ①

題意を満たすとき、次の2つの場合が考えられる。

[1] ①が異なる2つの実数解をもち、その一方が1である。

[2] ①が1以外の重解をもつ。

[1]の場合 ①は  $x=1$  を解にもつから  $1^2+4\cdot 1+a=0$  よって  $a=-5$

このとき、①は  $(x-1)(x+5)=0$

ゆえに、 $x=1, \quad -5$  を解にもち、適する。

[2]の場合 ①は重解をもつから、①の判別式  $D$  について、 $D=0$  が成り立つ。

ここで  $\frac{D}{4}=4-a$  よって  $4-a=0$  ゆえに  $a=4$

このとき、①は  $(x+2)^2=0$

よって、 $x=-2$  を重解にもち、適する。

以上から  $a=-5, \quad 4$

11.  $x$  の方程式  $x^3-3x^2+ax+2-a=0$  について、方程式が異なる3つの実数解をもつとき、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。

**解答**  $a<3$

**解説**

$P(x)=x^3-3x^2+ax+2-a$  とすると  $P(1)=1^3-3\cdot 1^2+a\cdot 1+2-a=0$

よって、 $x=1$  は方程式  $P(x)=0$  の解である。

$P(x)=(x-1)(x^2-2x+a-2)$

と因数分解される。

$P(x)=0$  より  $x-1=0$  または

$$x^2-2x+a-2=0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

求める条件は、方程式①が  $x\neq 1$  である異なる2つの実数解をもつことである。

①が  $x=1$  を解としてもたないから  $1^2-2\cdot 1+a-2\neq 0$  ゆえに  $a\neq 3$

①の判別式は  $\frac{D}{4}=(-1)^2-(a-2)=3-a$

$D>0$  から  $3-a>0$  よって  $a<3$  これは  $a\neq 3$  を満たす。

12.  $x=1-\sqrt{2}i$  のとき、 $x^4-4x^3+2x^2-3x-1$  の値を求めよ。

**解答**  $7+7\sqrt{2}i$

**解説**

$x=1-\sqrt{2}i$  から  $x-1=-\sqrt{2}i$

両辺を平方して  $x^2-2x+1=-2$

すなわち  $x^2-2x+3=0$  つまり、 $x=1-\sqrt{2}i$  は  $x^2-2x+3=0$  を満たす

また、 $x^4-4x^3+2x^2-3x-1$  を  $x^2-2x+3$  で割ると、商  $x^2-2x-5$ , 余り  $-7x+14$

であるから、次の等式が成り立つ。

$$x^4-4x^3+2x^2-3x-1=(x^2-2x+3)(x^2-2x-5)-7x+14$$

よって、 $x=1-\sqrt{2}i$  のとき、左辺の値は  $x^2-2x+3=0$  より

$0\times(x^2-2x-5)-7x+14$  つまり  $-7x+14$  の値に等しい。

したがって、求める式の値は  $-7(1-\sqrt{2}i)+14=7+7\sqrt{2}i$