

1. 次の方程式を解け。

(1)  $(x+1)(x-1)(x-5)=0$

(2)  $(x+2)(x+3)(2x-5)=0$

(3)  $x^3 - 4x^2 + 6x = 0$

(4)  $(x-1)(x^2 + 2x - 5) = 0$

2. 次の方程式を解け。

(1)  $x^3 = -8$

(2)  $x^3 = 27$

(3)  $16x^4 = 1$

(4)  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

(5)  $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$

(6)  $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$

3. 次の方程式を解け。

(1)  $(x+1)(x+3)(x+5) = 48$

(2)  $x^3 + 4x^2 - x - 22 = 0$

4. 次の方程式を解け。

(1)  $x^3 - 13x + 12 = 0$

(2)  $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

(3)  $x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0$

(4)  $x^3 + 5x^2 + 3x - 1 = 0$

(5)  $8x^3 + 4x - 3 = 0$

(6)  $3x^3 - 8x^2 + 1 = 0$

5. 方程式  $x^3 + ax^2 - x - 6 = 0$  の1つの解が2であるとき、定数  $a$  の値を求めよ。また、他の解を求めよ。6. 方程式  $x^3 + ax^2 + bx - 6 = 0$  の2つの解を-1, 2とするとき、定数  $a$ ,  $b$  の値と他の解を求めよ。

7. 方程式  $x^3+ax^2+bx+10=0$  の 1 つの解が  $1+2i$  であるとき、実数の定数  $a$ ,  $b$  の値と他の解を求めよ。

8.  $x$  の多項式  $ax^3+11x^2+bx-4$  が  $(x+2)^2$  で割り切れるとき、定数  $a$ ,  $b$  の値を求めよ。

9. 3 次方程式  $x^3-(a+3)x^2+9a=0$  について、次の問い合わせに答えよ。

- (1)  $x=3$  を解にもつことを示せ。
- (2) この方程式が 3 を 2 重解としてもつように、定数  $a$  の値を定めよ。
- (3) この方程式が 3 以外の解を 2 重解としてもつように、定数  $a$  の値を定めよ。

11.  $x$  の方程式  $x^3-3x^2+ax+2-a=0$  について、方程式が異なる 3 つの実数解をもつとき、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。

12.  $x=1-\sqrt{2}i$  のとき、 $x^4-4x^3+2x^2-3x-1$  の値を求めよ。

1. 次の方程式を解け。

$$\begin{array}{ll} (1) (x+1)(x-1)(x-5)=0 & (2) (x+2)(x+3)(2x-5)=0 \\ (3) x^3-4x^2+6x=0 & (4) (x-1)(x^2+2x-5)=0 \end{array}$$

**解答** (1)  $x=-1, 1, 5$  (2)  $x=-3, -2, \frac{5}{2}$  (3)  $x=0, 2\pm\sqrt{2}i$   
 (4)  $x=1, -1\pm\sqrt{6}$

**解説**

(1)  $x+1=0$  または  $x-1=0$  または  $x-5=0$

よって  $x=-1, 1, 5$

(2)  $x+2=0$  または  $x+3=0$  または  $2x-5=0$

よって  $x=-3, -2, \frac{5}{2}$

(3) 左辺を因数分解して  $x(x^2-4x+6)=0$

ゆえに  $x=0$  または  $x^2-4x+6=0$

$x^2-4x+6=0$  から  $x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot6}=2\pm\sqrt{2}i$

よって  $x=0, 2\pm\sqrt{2}i$

(4)  $x-1=0$  または  $x^2+2x-5=0$

$x^2+2x-5=0$  から  $x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-5)}=-1\pm\sqrt{6}$

よって  $x=1, -1\pm\sqrt{6}$

2. 次の方程式を解け。

$$\begin{array}{lll} (1) x^3=-8 & (2) x^3=27 & (3) 16x^4=1 \\ (4) x^4-10x^2+9=0 & (5) x^4+4x^2-5=0 & (6) x^4-4x^2-12=0 \end{array}$$

**解答** (1)  $x=-2, 1\pm\sqrt{3}i$  (2)  $x=3, \frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$  (3)  $x=\pm\frac{1}{2}i, \pm\frac{1}{2}$   
 (4)  $x=\pm 1, \pm 3$  (5)  $x=\pm 1, \pm\sqrt{5}i$  (6)  $x=\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{2}i$

**解説**

(1) 方程式は  $x^3+8=0$

左辺を因数分解して  $(x+2)(x^2-2x+4)=0$

ゆえに  $x+2=0$  または  $x^2-2x+4=0$

$x^2-2x+4=0$  から  $x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot4}=1\pm\sqrt{3}i$

よって  $x=-2, 1\pm\sqrt{3}i$

(2) 方程式は  $x^3-27=0$

左辺を因数分解して  $(x-3)(x^2+3x+9)=0$

ゆえに  $x-3=0$  または  $x^2+3x+9=0$

$x^2+3x+9=0$  から  $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot9}}{2}=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

よって  $x=3, \frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(3) 方程式は  $16x^4-1=0$

左辺を因数分解して  $(4x^2+1)(4x^2-1)=0$

ゆえに  $4x^2+1=0$  または  $4x^2-1=0$

すなわち  $x^2=-\frac{1}{4}$  または  $x^2=\frac{1}{4}$

よって  $x=\pm\frac{1}{2}i, \pm\frac{1}{2}$

(4) 左辺を因数分解して  $(x^2-1)(x^2-9)=0$

ゆえに  $x^2-1=0$  または  $x^2-9=0$

よって  $x=\pm 1, \pm 3$

(5) 左辺を因数分解して  $(x^2-1)(x^2+5)=0$

ゆえに  $x^2-1=0$  または  $x^2+5=0$

よって  $x=\pm 1, \pm\sqrt{5}i$

(6) 左辺を因数分解して  $(x^2+2)(x^2-6)=0$

ゆえに  $x^2+2=0$  または  $x^2-6=0$

よって  $x=\pm\sqrt{2}i, \pm\sqrt{6}$

3. 次の方程式を解け。

(1)  $(x+1)(x+3)(x+5)=48$

(2)  $x^3+4x^2-x-22=0$

**解答** (1)  $x=1, -5\pm2\sqrt{2}i$  (2)  $x=2, -3\pm\sqrt{2}i$

**解説**

(1)  $P(x)=(x+1)(x+3)(x+5)-48$  とすると

$P(x)$  の右辺を展開して整理すると  $P(x)=x^3+9x^2+23x-33$

$P(1)=1+9+23-33=0$  より

$P(x)$  は  $x-1$  で割り切れるから割り算をすると  $P(x)=(x-1)(x^2+10x+33)$

$P(x)=0$  から  $x-1=0$  または  $x^2+10x+33=0$

$x^2+10x+33=0$  から  $x=-5\pm\sqrt{5^2-1\cdot33}=-5\pm2\sqrt{2}i$

したがって  $x=1, -5\pm2\sqrt{2}i$

(2)  $P(x)=x^3+4x^2-x-22$  とすると  $P(2)=2^3+4\cdot2^2-2-22=0$

よって,  $P(x)$  は  $x-2$  で割り切れるから割り算をすると

$P(x)=(x-2)(x^2+6x+11)$

$P(x)=0$  から  $x-2=0$  または  $x^2+6x+11=0$

$x^2+6x+11=0$  から  $x=-3\pm\sqrt{3^2-1\cdot11}=-3\pm\sqrt{2}i$

したがって  $x=2, -3\pm\sqrt{2}i$

4. 次の方程式を解け。

(1)  $x^3-13x+12=0$  (2)  $x^3+6x^2+11x+6=0$  (3)  $x^3+x^2+2x-4=0$

(4)  $x^3+5x^2+3x-1=0$  (5)  $8x^3+4x-3=0$  (6)  $3x^3-8x^2+1=0$

**解答** (1)  $x=1, 3, -4$  (2)  $x=-1, -2, -3$  (3)  $x=1, -1\pm\sqrt{3}i$

(4)  $x=-1, -2\pm\sqrt{5}$  (5)  $x=\frac{1}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{11}i}{4}$  (6)  $x=-\frac{1}{3}, \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

**解説**

(1)  $P(x)=x^3-13x+12$  とすると  $P(1)=1^3-13\cdot1+12=0$

よって,  $P(x)$  は  $x-1$  で割り切れるから割り算をすると

$P(x)=(x-1)(x^2+x-12)=(x-1)(x-3)(x+4)$

$P(x)=0$  から  $x-1=0$  または  $x-3=0$  または  $x+4=0$

したがって  $x=1, 3, -4$

(2)  $P(x)=x^3+6x^2+11x+6$  とすると  $P(-1)=(-1)^3+6(-1)^2+11(-1)+6=0$

よって,  $P(x)$  は  $x+1$  で割り切れるから割り算をすると

$P(x)=(x+1)(x^2+5x+6)=(x+1)(x+2)(x+3)$

$P(x)=0$  から  $x+1=0$  または  $x+2=0$  または  $x+3=0$

したがって  $x=-1, -2, -3$

(3)  $P(x)=x^3+x^2+2x-4$  とすると  $P(1)=1^3+1^2+2\cdot1-4=0$

よって,  $P(x)$  は  $x-1$  で割り切れるから割り算をすると

$P(x)=(x-1)(x^2+2x+4)$

$P(x)=0$  から  $x-1=0$  または  $x^2+2x+4=0$

$x^2+2x+4=0$  から  $x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot4}=-1\pm\sqrt{3}i$

したがって  $x=1, -1\pm\sqrt{3}i$

(4)  $P(x)=x^3+5x^2+3x-1$  とすると  $P(-1)=(-1)^3+5(-1)^2+3(-1)-1=0$

よって,  $P(x)$  は  $x+1$  で割り切れるから割り算をすると

$P(x)=(x+1)(x^2+4x-1)$

$P(x)=0$  から  $x+1=0$  または  $x^2+4x-1=0$

$x^2+4x-1=0$  から  $x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot(-1)}=-2\pm\sqrt{5}$

したがって  $x=-1, -2\pm\sqrt{5}$

(5)  $P(x)=8x^3+4x-3$  とすると  $P\left(\frac{1}{2}\right)=8\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\cdot\frac{1}{2}-3=0$

よって,  $P(x)$  は  $2x-1$  で割り切れるから割り算をすると

$P(x)=(2x-1)(4x^2+2x+3)$

$P(x)=0$  から  $2x-1=0$  または  $4x^2+2x+3=0$

$4x^2+2x+3=0$  から  $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot3}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{4}$

したがって  $x=\frac{1}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{11}i}{4}$

(6)  $P(x)=3x^3-8x^2+1$  とすると  $P\left(-\frac{1}{3}\right)=3\left(-\frac{1}{3}\right)^3-8\left(-\frac{1}{3}\right)^2+1=0$

よって,  $P(x)$  は  $3x+1$  で割り切れるから割り算をすると

$P(x)=(3x+1)(x^2-3x+1)$

$P(x)=0$  から  $3x+1=0$  または  $x^2-3x+1=0$

$x^2-3x+1=0$  から  $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot1}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

したがって  $x=-\frac{1}{3}, \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

5. 方程式  $x^3+ax^2-x-6=0$  の 1 つの解が 2 であるとき, 定数  $a$  の値を求めよ。また, その他の解を求めよ。

**解答**  $a=0$ , 他の解  $x=-1\pm\sqrt{2}i$

**解説**

$x=2$  がこの方程式の解であるから  $2^3+a\cdot2^2-2-6=0$

ゆえに  $4a=0$  よって  $a=0$

このとき, 方程式は  $x^3-x-6=0$

左辺は  $x-2$  で割り切れるから, これを因数分解すると

$(x-2)(x^2+2x+3)=0$

したがって, 他の解は  $x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot3}=-1\pm\sqrt{2}i$

6. 方程式  $x^3+ax^2+bx-6=0$  の 2 つの解を  $-1, 2$  とするとき, 定数  $a, b$  の値と他の解を求めよ。

**解答**  $a=2, b=-5$ , 他の解  $x=-3$

**解説**

$x=-1, 2$  が解であるから

$(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)-6=0, 2^3+a\cdot2^2+b\cdot2-6=0$

整理すると  $a-b=7, 2a+b=-1$

これを解いて  $a=2, b=-5$

このとき, 方程式は  $x^3+2x^2-5x-6=0$

左辺は  $x+1$ ,  $x-2$  を因数にもつから、これを因数分解すると

$$(x+1)(x-2)(x+3)=0$$

したがって、他の解は  $x=-3$

**別解** 他の解を  $x=\alpha$  とおくと、条件から、次の等式が成り立つ。

$$x^3+ax^2+bx-6=(x+1)(x-2)(x-\alpha)$$

右辺を展開して整理すると

$$x^3+ax^2+bx-6=x^3-(\alpha+1)x^2+(\alpha-2)x+2\alpha$$

両辺の係数を比較すると

$$\alpha=-\alpha-1, b=\alpha-2, -6=2\alpha$$

これを解いて  $\alpha=-3, b=2, \alpha=-5$

7. 方程式  $x^3+ax^2+bx+10=0$  の 1 つの解が  $1+2i$  であるとき、実数の定数  $a, b$  の値と他の解を求めよ。

**解答**  $a=0, b=1$ , 他の解  $x=-2, 1-2i$

**解説**

$1+2i$  が解であるから

$$(1+2i)^3+a(1+2i)^2+b(1+2i)+10=0$$

$$\text{ゆえに } -11-2i+a(-3+4i)+b(1+2i)+10=0$$

$$\text{よって } (-3a+b-1)+2(2a+b-1)i=0$$

$$a, b \text{ は実数であるから } -3a+b-1=0, 2a+b-1=0$$

$$\text{これを解いて } a=0, b=1$$

このとき、方程式は  $x^3+x+10=0$

$$\text{左辺を因数分解すると } (x+2)(x^2-2x+5)=0$$

$$\text{これを解いて } x=-2, 1\pm 2i$$

$$\text{したがって、他の解は } x=-2, 1-2i$$

**参考** 係数が実数である方程式が虚数解  $a+bi$  をもつと、その共役な複素数  $a-bi$  も、この方程式の解である。本問の場合、 $1+2i$  が解であるから、それと共に複素数  $1-2i$  もこの方程式の解である。

8.  $x$  の多項式  $ax^3+11x^2+bx-4$  が  $(x+2)^2$  で割り切れるとき、定数  $a, b$  の値を求めよ。

**解答**  $a=3, b=8$

**解説**

$P(x)=ax^3+11x^2+bx-4$  とおく。 $P(x)$  が  $(x+2)^2$  で割り切れるので、 $P(x)$  は  $(x+2)$  で 2 回割り切れる。

$P(x)$  は  $x+2$  で割り切れるから、 $x=-2$  を代入すると計算結果は 0 になる

$$\text{つまり } P(-2)=0 \text{ ゆえに } a(-2)^3+11(-2)^2+b(-2)-4=0$$

$$\text{よって } b=-4(a-5) \quad \dots \quad ① \quad \text{これを代入すると}$$

$$P(x)=ax^3+11x^2-4(a-5)x-4$$

よって、 $P(x)$  を  $x+2$  で割ると

$$\begin{array}{r} ax^2+(11-2a)x-2 \\ x+2) \overline{ax^3+11x^2-4(a-5)x-4} \\ \underline{ax^3+2ax^2} \\ (11-2a)x^2-4(a-5)x \\ \underline{(11-2a)x^2+2(11-2a)x} \\ -2x \quad -4 \\ -2x \quad -4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{よって } P(x)=(x+2)[ax^2+(11-2a)x-2]$$

$$Q(x)=ax^2+(11-2a)x-2 \text{ とおくと、 } Q(x) \text{ は } x+2 \text{ で割り切れるから } Q(-2)=0$$

$$\text{ゆえに } a(-2)^2+(11-2a)\cdot(-2)-2=0 \quad \text{整理して } 8a-24=0$$

$$\text{よって } a=3 \quad ① \text{ に代入して } b=8$$

9. 3 次方程式  $x^3-(a+3)x^2+9a=0$  について、次の問い合わせよ。

(1)  $x=3$  を解にもつことを示せ。

(2) この方程式が 3 を 2 重解としてもつよう、定数  $a$  の値を定めよ。

(3) この方程式が 3 以外の解を 2 重解としてもつよう、定数  $a$  の値を定めよ。

**解答** (1) 略 (2)  $a=\frac{3}{2}$  (3)  $a=0, -12$

**解説**

(1) 方程式の左辺に  $x=3$  を代入すると

$$3^3-(a+3)\cdot 3^2+9a=27-9a-27+9a=0$$

したがって、方程式は  $x=3$  を解にもつ。

(2) 方程式の左辺は  $x-3$  で割り切れる。割り算をして

$$\text{因数分解すると } (x-3)(x^2-ax-3a)=0$$

$$\text{よって } x-3=0 \text{ または } x^2-ax-3a=0 \quad \dots \quad ①$$

題意を満たすための条件は、次の [1], [2] が成り立つことである。

[1] 2 次方程式 ① が  $x=3$  を解にもつ。

[2] 2 次方程式 ① が重解をもたない。

$$[1] \text{ から } 3^2-a\cdot 3-3a=0 \quad \text{整理して } 9-6a=0 \quad \text{よって } a=\frac{3}{2}$$

また、2次方程式 ① の判別式は  $D=(-a)^2-4(-3a)=a^2+12a=a(a+12)$

$$a=\frac{3}{2} \text{ のとき, } D \neq 0 \text{ であるから, [2] を満たす。}$$

$$\text{したがって、求める } a \text{ の値は } a=\frac{3}{2}$$

(3) 題意を満たすための条件は、2次方程式 ① が 3 以外の重解をもつことである。

$$D=0 \text{ から } a(a+12)=0 \quad \text{よって } a=0, -12$$

$$\text{①の重解は, } a=0 \text{ のとき } x^2=0 \text{ より } x=0,$$

$$a=-12 \text{ のとき } x^2+12x+36=0 \text{ より } x=-6$$

となるから、条件を満たす。

$$\text{したがって、求める } a \text{ の値は } a=0, -12$$

10. 3 次方程式  $x^3+3x^2+(a-4)x-a=0$  の異なる解が 2 つであるように、定数  $a$  の値を定めよ。

**解答**  $a=-5, 4$

**解説**

$x^3+3x^2+(a-4)x-a$  に  $x=1$  を代入すると 0 になる。

$x^3+3x^2+(a-4)x-a$  は  $x-1$  で割り切れる。割り算をして因数分解すると

よって、方程式は  $(x-1)(x^2+4x+a)=0$

$$\text{ゆえに } x-1=0 \text{ または } x^2+4x+a=0 \quad \dots \quad ①$$

題意を満たすとき、次の 2 つの場合が考えられる。

[1] ① が異なる 2 つの実数解をもち、その一方が 1 である。

[2] ① が 1 以外の重解をもつ。

[1] の場合 ① は  $x=1$  を解にもつから  $1^2+4\cdot 1+a=0$  よって  $a=-5$

$$\text{このとき, ① は } (x-1)(x+5)=0$$

ゆえに、 $x=1, -5$  を解にもち、適する。

[2] の場合 ① は重解をもつから、①の判別式  $D$  について、 $D=0$  が成り立つ。

$$\text{ここで } \frac{D}{4}=4-a \quad \text{よって } 4-a=0 \quad \text{ゆえに } a=4$$

$$\text{このとき, ① は } (x+2)^2=0$$

よって、 $x=-2$  を重解にもち、適する。

以上から  $a=-5, 4$

11.  $x$  の方程式  $x^3-3x^2+ax+2-a=0$  について、方程式が異なる 3 つの実数解をもつとき、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。

**解答**  $a < 3$

**解説**

$$P(x)=x^3-3x^2+ax+2-a \text{ とする } P(1)=1^3-3\cdot 1^2+a\cdot 1+2-a=0$$

よって、 $x=1$  は方程式  $P(x)=0$  の解である。

$$P(x)=(x-1)(x^2-2x+a-2)$$

と因数分解される。

$$P(x)=0 \text{ より } x-1=0 \text{ または } x^2-2x+a-2=0 \quad \dots \quad ①$$

求める条件は、方程式 ① が  $x \neq 1$  である異なる 2 つの実数解をもつことである。

① が  $x=1$  を解としてもたないから  $1^2-2\cdot 1+a-2 \neq 0$  ゆえに  $a \neq 3$

$$\text{①の判別式は } \frac{D}{4}=(-1)^2-(a-2)=3-a$$

$D > 0$  から  $3-a > 0$  よって  $a < 3$  これは  $a \neq 3$  を満たす。

12.  $x=1-\sqrt{2}i$  のとき、 $x^4-4x^3+2x^2-3x-1$  の値を求めよ。

**解答**  $7+7\sqrt{2}i$

**解説**

$$x=1-\sqrt{2}i \text{ から } x-1=-\sqrt{2}i$$

両辺を平方して  $x^2-2x+1=-2$

すなわち  $x^2-2x+3=0$  つまり、 $x=1-\sqrt{2}i$  は  $x^2-2x+3=0$  を満たす  
また、 $x^4-4x^3+2x^2-3x-1$  を  $x^2-2x+3$  で割ると、商  $x^2-2x-5$ 、余り  $-7x+14$  であるから、次の等式が成り立つ。

$$x^4-4x^3+2x^2-3x-1=(x^2-2x+3)(x^2-2x-5)-7x+14$$

よって、 $x=1-\sqrt{2}i$  のとき、左辺の値は  $x^2-2x+3=0$  より

$$0 \times (x^2-2x-5)-7x+14 \text{ つまり } -7x+14 \text{ の値に等しい。}$$

したがって、求める式の値は  $-7(1-\sqrt{2}i)+14=7+7\sqrt{2}i$