数学演習（解と係数の関係）R１．５．２８　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 2 次方程式 $2x^2+8x-3=0$ の 2 つの解を α，β とする。次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　　(2) $2(3-\alpha)(3-\beta)$　　(3) $\alpha^3+\beta^3$

(4) $\alpha^4+\beta^4$　　(5) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　　(6) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

$\boxed{2}$ 2 次方程式 $x^2-3x+7=0$ の 2 つの解を α，β とする。このとき，

$(2-\alpha)(2-\beta)=$ ア$\boxed{}$ であり，$(\alpha-2)^3+(\beta-2)^3=$ イ$\boxed{}$ である。

$\boxed{3}$ 2 次方程式 $x^2-6x+k=0$ について，次の条件を満たすように，定数 k の値を定めよ。

(1) 1 つの解が他の解の 2 倍　　(2) 1 つの解が他の解の 2 乗

$\boxed{4}$ 次の式を，複素数の範囲で因数分解せよ。

(1) $2x^2-3x+4$　　(2) x^4-64　　(3) x^4+4x^2+36

$\boxed{5}$ $x^2+3xy+2y^2-3x-5y+k$ が x，y の 1 次式の積に因数分解できるとき，定数 k の値を求めよ。また，その場合に，この式を因数分解せよ。

$\boxed{6}$ (1) $\dfrac{-1+\sqrt{5}\,i}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{5}\,i}{2}$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

(2) 和が 3，積が 3 である 2 数を求めよ。

$\boxed{7}$ 2 次方程式 $x^2-(a-10)x+a+14=0$ が次のような解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(1) 異なる 2 つの正の解　　(2) 異符号の解

$\boxed{8}$ 2 次方程式 $x^2-2px+p+2=0$ が次の条件を満たす解をもつように，定数 p の値の範囲を定めよ。

(1) 2 つの解がともに 1 より大きい。

(2) 1 つの解は 3 より大きく，他の解は 3 より小さい。

$\boxed{9}$ 2 次方程式 $x^2-mx+3m=0$ が整数解のみをもつような定数 m の値とそのときの整数の解をすべて求めよ。

数学演習（解と係数の関係）R１．５．２８　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 2 次方程式 $2x^2+8x-3=0$ の 2 つの解を α，β とする。次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　　(2) $2(3-\alpha)(3-\beta)$　　(3) $\alpha^3+\beta^3$

(4) $\alpha^4+\beta^4$　　(5) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　　(6) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

解答　(1)　6　　(2)　39　　(3)　-82　　(4)　$\dfrac{713}{2}$　　(5)　$\dfrac{8}{3}$　　(6)　$-\dfrac{38}{3}$

解説

解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=-\dfrac{8}{2}=-4$，$\alpha\beta=-\dfrac{3}{2}$

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdot(-4)=6$

(2) $2(3-\alpha)(3-\beta)=18-6(\alpha+\beta)+2\alpha\beta$

$$=18-6\cdot(-4)+2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=39$$

(3) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$=(-4)^3-3\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdot(-4)=-82$$

(4) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16+3=19$ であるから

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=19^2-2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{713}{2}$

(5) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=(-4)\div\left(-\dfrac{3}{2}\right)=(-4)\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{3}$

(6) (4) より，$\alpha^2+\beta^2=19$ であるから

$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=19\div\left(-\dfrac{3}{2}\right)=19\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{38}{3}$

$\boxed{2}$ 2 次方程式 $x^2-3x+7=0$ の 2 つの解を α，β とする。このとき，

$(2-\alpha)(2-\beta)=$ ア $\boxed{}$ であり，$(\alpha-2)^3+(\beta-2)^3=$ イ $\boxed{}$ である。

解答　（ア）　5　　（イ）　14

解説

$\alpha-2=\gamma$，$\beta-2=\delta$ とおくと　　$\alpha=\gamma+2$，$\beta=\delta+2$

α，β は $x^2-3x+7=0$ の解であるから，γ，δ は 2 次方程式

$(x+2)^2-3(x+2)+7=0$ …… ① の解である。

① の左辺を展開して整理すると　　$x^2+x+5=0$

解と係数の関係から　　$\gamma+\delta=-1$，$\gamma\delta=5$

（ア）　$(2-\alpha)(2-\beta)=(\alpha-2)(\beta-2)=\gamma\delta=5$

（イ）　$(\alpha-2)^3+(\beta-2)^3=\gamma^3+\delta^3=(\gamma+\delta)^3-3\gamma\delta(\gamma+\delta)$

$$=(-1)^3-3\cdot5\cdot(-1)=14$$

$\boxed{3}$ 2 次方程式 $x^2-6x+k=0$ について，次の条件を満たすように，定数 k の値を定めよ。

(1)　1 つの解が他の解の 2 倍　　(2)　1 つの解が他の解の 2 乗

解答　(1)　$k=8$　　(2)　$k=8$，-27

解説

(1)　2 つの解は α，2α と表すことができる。

解と係数の関係から　　$\alpha+2\alpha=6$，　$\alpha\cdot2\alpha=k$

すなわち　　$3\alpha=6$，　$2\alpha^2=k$

ゆえに　　$\alpha=2$　　このとき　　$k=2\cdot2^2=8$

(2)　2 つの解は α，α^2 と表すことができる。

解と係数の関係から　　$\alpha+\alpha^2=6$，　$\alpha\cdot\alpha^2=k$

すなわち　　$\alpha^2+\alpha-6=0$ …… ①，　$\alpha^3=k$ …… ②

① から　　$(\alpha-2)(\alpha+3)=0$　　よって　　$\alpha=2$，-3

② から　　$\alpha=2$ のとき　$k=8$，　$\alpha=-3$ のとき　$k=-27$

したがって　　$k=8$，-27

$\boxed{4}$ 次の式を，複素数の範囲で因数分解せよ。

(1)　$2x^2-3x+4$　　(2)　x^4-64　　(3)　x^4+4x^2+36

解答　(1)　$2\left(x-\dfrac{3+\sqrt{23}\,i}{4}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{23}\,i}{4}\right)$

(2)　$(x+2\sqrt{2}\,i)(x-2\sqrt{2}\,i)(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})$

(3)　$(x+\sqrt{2}-2i)(x+\sqrt{2}+2i)(x-\sqrt{2}-2i)(x-\sqrt{2}+2i)$

解説

(1)　$2x^2-3x+4=0$ を解くと

$$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot4}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{23}\,i}{4}$$

よって　　$2x^2-3x+4=2\left(x-\dfrac{3+\sqrt{23}\,i}{4}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{23}\,i}{4}\right)$

(2)　$x^4-64=(x^2)^2-8^2=(x^2+8)(x^2-8)$

$x^2+8=0$ を解くと　　$x=\pm2\sqrt{2}\,i$

$x^2-8=0$ を解くと　　$x=\pm2\sqrt{2}$

よって　　$x^4-64=(x+2\sqrt{2}\,i)(x-2\sqrt{2}\,i)(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})$

(3)　$x^4+4x^2+36=x^4+12x^2+36-8x^2=(x^2+6)^2-(2\sqrt{2}\,x)^2$

$$=(x^2+2\sqrt{2}\,x+6)(x^2-2\sqrt{2}\,x+6)$$

$x^2+2\sqrt{2}\,x+6=0$ を解くと　　$x=-\sqrt{2}\pm2i$

$x^2-2\sqrt{2}\,x+6=0$ を解くと　　$x=\sqrt{2}\pm2i$

よって

$x^4+4x^2+36=\{x-(-\sqrt{2}+2i)\}\{x-(-\sqrt{2}-2i)\}\times\{x-(\sqrt{2}+2i)\}\{x-(\sqrt{2}-2i)\}$

$$=(x+\sqrt{2}-2i)(x+\sqrt{2}+2i)(x-\sqrt{2}-2i)(x-\sqrt{2}+2i)$$

$\boxed{5}$ $x^2+3xy+2y^2-3x-5y+k$ が x，y の 1 次式の積に因数分解できるとき，定数 k の値を求めよ。また，その場合に，この式を因数分解せよ。

解答　$k=2$，$(x+y-2)(x+2y-1)$

解説

$P=x^2+3xy+2y^2-3x-5y+k$ とすると

$$P=x^2+3(y-1)x+2y^2-5y+k$$

$P=0$ を x についての 2 次方程式と考えると，解の公式から

$$x=\frac{-3(y-1)\pm\sqrt{9(y-1)^2-4(2y^2-5y+k)}}{2}$$

$$=\frac{-3(y-1)\pm\sqrt{y^2+2y+9-4k}}{2}$$

P が x，y の 1 次式の積に因数分解できるためには，この解が y の 1 次式で表されなければならない。

よって，根号内の式 $y^2+2y+9-4k$ は完全平方式でなければならないから，

$y^2+2y+9-4k=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=1^2-(9-4k)=4k-8=0$　　ゆえに　　$k=2$

このとき　　$x=\dfrac{-3(y-1)\pm\sqrt{(y+1)^2}}{2}=\dfrac{-3y+3\pm(y+1)}{2}$

すなわち　　$x=-y+2$，$-2y+1$

よって　　$P=\{x-(-y+2)\}\{x-(-2y+1)\}=(x+y-2)(x+2y-1)$

$\boxed{6}$ (1)　$\dfrac{-1+\sqrt{5}\,i}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{5}\,i}{2}$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

(2)　和が 3，積が 3 である 2 数を求めよ。

解答　(1)　$2x^2+2x+3=0$　　(2)　$\dfrac{3+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\dfrac{3-\sqrt{3}\,i}{2}$

解説

(1)　2 数の和は　　$\dfrac{-1+\sqrt{5}\,i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{5}\,i}{2}=-1$，

2 数の積は　　$\dfrac{-1+\sqrt{5}\,i}{2}\cdot\dfrac{-1-\sqrt{5}\,i}{2}=\dfrac{(-1)^2-(\sqrt{5}\,i)^2}{4}=\dfrac{3}{2}$

よって，求める 2 次方程式は　　$x^2+x+\dfrac{3}{2}=0$　…… ①

① の両辺を 2 倍して　　$2x^2+2x+3=0$

(2)　2 数を α，β とすると　　$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=3$

したがって，α，β は 2 次方程式 $x^2-3x+3=0$ の 2 つの解である。

この 2 次方程式を解いて　　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

よって，求める 2 数は　　$\dfrac{3+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\dfrac{3-\sqrt{3}\,i}{2}$

$\boxed{7}$ 2 次方程式 $x^2-(a-10)x+a+14=0$ が次のような解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(1)　異なる 2 つの正の解　　(2)　異符号の解

解答　(1)　$a>22$　　(2)　$a<-14$

解説

2 次方程式 $x^2-(a-10)x+a+14=0$ の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とする。

ここで　　$D=\{-(a-10)\}^2-4(a+14)=a^2-24a+44=(a-2)(a-22)$

解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=a-10$，$\alpha\beta=a+14$

(1)　$\alpha\neq\beta$，$\alpha>0$，$\beta>0$ であるための条件は

$D>0$　かつ　$\alpha+\beta>0$　かつ　$\alpha\beta>0$

$D>0$ から　　$(a-2)(a-22)>0$

ゆえに　　$a<2$，$22<a$ …… ①

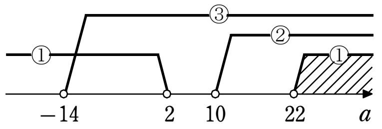
$\alpha+\beta>0$ から　　$a-10>0$

よって　　$a>10$　　…… ②

$\alpha\beta>0$ から　　$a+14>0$

よって　　$a>-14$　　…… ③

①，②，③ の共通範囲を求めて



$a>22$

(2)　α，β が異符号であるための条件は　　$\alpha\beta<0$

ゆえに　　$a+14<0$　　　よって　　$a<-14$

8　2 次方程式 $x^2-2px+p+2=0$ が次の条件を満たす解をもつように，定数 p の値の範囲を定めよ。

(1)　2 つの解がともに 1 より大きい。

(2)　1 つの解は 3 より大きく，他の解は 3 より小さい。

解答　(1)　$2\leqq p<3$　　(2)　$p>\dfrac{11}{5}$

解説

2 次方程式 $x^2-2px+p+2=0$ の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とする。

$$\frac{D}{4}=(-p)^2-(p+2)=p^2-p-2=(p+1)(p-2)$$

解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=2p$，$\alpha\beta=p+2$

(1)　$\alpha>1$，$\beta>1$ であるための条件は

$D\geqq 0$　かつ　$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$　かつ　$(\alpha-1)(\beta-1)>0$

$D\geqq 0$ から　　$(p+1)(p-2)\geqq 0$

よって　　$p\leqq -1$，$2\leqq p$　…… ①

$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$ すなわち $\alpha+\beta-2>0$ から　　$2p-2>0$

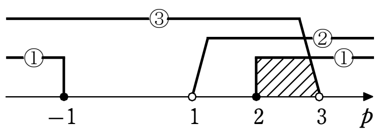
よって　　$p>1$　　…… ②

$(\alpha-1)(\beta-1)>0$ すなわち $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$ から

$p+2-2p+1>0$

よって　　$p<3$　　…… ③

求める p の値の範囲は，①，②，③ の共通範囲をとって



$2\leqq p<3$

(2)　$\alpha<\beta$ とすると，$\alpha<3<\beta$ であるための条件は

$(\alpha-3)(\beta-3)<0$　すなわち　$\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9<0$

ゆえに　　$p+2-3\cdot 2p+9<0$　　　よって　　$p>\dfrac{11}{5}$

9　2 次方程式 $x^2-mx+3m=0$ が整数解のみをもつような定数 m の値とそのときの整数の解をすべて求めよ。

解答　$m=-4$ のとき $x=-6$，2；$m=0$ のとき $x=0$；$m=12$ のとき $x=6$；$m=16$ のとき $x=4$，12

解説

2 次方程式 $x^2-mx+3m=0$ が 2 つの整数解 α，β $(\alpha\leqq\beta)$ をもつとすると，解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=m$，$\alpha\beta=3m$　…… ①

① から m を消去すると　　$\alpha\beta=3(\alpha+\beta)$

よって　　$\alpha\beta-3\alpha-3\beta=0$

すなわち　　$\alpha(\beta-3)-3\beta=0$

ゆえに　　$\alpha(\beta-3)-3(\beta-3)-9=0$

よって　　$(\alpha-3)(\beta-3)=9$

α，β は整数であるから，$\alpha-3$，$\beta-3$ も整数である。

$\alpha\leqq\beta$ より $\alpha-3\leqq\beta-3$ であるから，$\alpha-3$，$\beta-3$ の値の組は

$(\alpha-3,\ \beta-3)=(-9,\ -1)$，$(-3,\ -3)$，$(1,\ 9)$，$(3,\ 3)$

ゆえに　　$(\alpha,\ \beta)=(-6,\ 2)$，$(0,\ 0)$，$(4,\ 12)$，$(6,\ 6)$

この α，β の値の組に対する m の値は，① から　　$m=-4$，0，16，12

したがって，求める m の値とそのときの整数解は

$m=-4$ のとき　$x=-6$，2

$m=0$　のとき　$x=0$

$m=12$　のとき　$x=6$

$m=16$　のとき　$x=4$，12