数学演習（複素数と方程式）Ｈ２４．１．３０　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．次の計算をせよ。

(1)　$(2-3i)^2+(2+3i)^2$　　(2)　$\left(\dfrac{2+i}{1-i}\right)^2$

2．次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。　$(2+3i)x+(2i-3)y=7i-4$

3．次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt{-3}\times\sqrt{-6}$　　(2)　$(\sqrt{2}-\sqrt{-3})^2$

4．2 次方程式 $x^2+4x+2=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$　　(2)　$\alpha^3+\beta^3$

5．次の 2 次式を，複素数の範囲で因数分解せよ。　$3x^2+4x+2$

6．次の 2 次方程式の 2 つの解の間に [　] 内の関係があるとき，定数 a の値，および 2 つの解を求めよ。　$x^2+ax+27=0$　　[1 つの解が他の解の 3 倍]

7．次の 2 次方程式 (1) を解け。また，方程式 (2) が虚数解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　$(2x-3)^2=x-2$　　(2)　$x^2+mx+m+3=0$

8．a は定数とする。2 次方程式 $x^2+2(3a-1)x+9a^2-4=0$ がともに正となるような実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

9．1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とする。$\omega^6+\omega^3+1$ の値を求めよ。

10. 多項式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると -1 余り，$x+3$ で割ると 9 余る。このとき，$P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの余りを求めよ。

11. 次の方程式を解け。

(1)　$x^3=27$　　(2)　$x^4+4x^2-5=0$

12. 次の方程式を解け。$x^3+4x^2-x-22=0$

13. 方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ の 1 つの解が $1+2i$ であるとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

14. x の方程式 $x^3-3x^2+ax+2-a=0$ について，方程式が異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

1．次の計算をせよ。

(1) $(2-3i)^2+(2+3i)^2$　　(2) $\left(\dfrac{2+i}{1-i}\right)^2$

解答　(1) -10　　(2) $-2+\dfrac{3}{2}i$

解説

(1) $(2-3i)^2+(2+3i)^2=4-12i+9i^2+4+12i+9i^2=-10$

(2) $\left(\dfrac{2+i}{1-i}\right)^2=\left\{\dfrac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right\}^2=\left(\dfrac{2+3i+i^2}{1-i^2}\right)^2$

$=\left(\dfrac{1+3i}{2}\right)^2=\dfrac{1+6i+9i^2}{4}=-2+\dfrac{3}{2}i$

2．次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。　$(2+3i)x+(2i-3)y=7i-4$

解答　$x=1$，$y=2$

解説

等式の左辺を i について整理すると　$(2x-3y)+(3x+2y)i=-4+7i$

$2x-3y$，$3x+2y$ は実数であるから　$2x-3y=-4$，$3x+2y=7$

これを解いて　$x=1$，$y=2$

3．次の計算をせよ。

(1) $\sqrt{-3}\times\sqrt{-6}$　　(2) $(\sqrt{2}-\sqrt{-3})^2$

解答　(1) $-3\sqrt{2}$　　(2) $-1-2\sqrt{6}\,i$

解説

(1) $\sqrt{-3}\times\sqrt{-6}=\sqrt{3}\,i\times\sqrt{6}\,i=\sqrt{18}\,i^2=-3\sqrt{2}$

(2) $(\sqrt{2}-\sqrt{-3})^2=(\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i)^2=2-2\sqrt{2}\sqrt{3}\,i+3i^2=2-2\sqrt{6}\,i-3=-1-2\sqrt{6}\,i$

4．2 次方程式 $x^2+4x+2=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2$　　(2) $\alpha^3+\beta^3$

解答　(1) 12　　(2) -40

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-4$，$\alpha\beta=2$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-4)^2-2\cdot2=12$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-4)^3-3\cdot2\cdot(-4)=-40$

5．次の 2 次式を，複素数の範囲で因数分解せよ。　$3x^2+4x+2$

解答　$3\left(x+\dfrac{2+\sqrt{2}\,i}{3}\right)\left(x+\dfrac{2-\sqrt{2}\,i}{3}\right)$

解説

$3x^2+4x+2=0$ の解は　$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot2}}{3}=\dfrac{-2\pm\sqrt{2}\,i}{3}$

よって　$3x^2+4x+2=3\left(x-\dfrac{-2-\sqrt{2}\,i}{3}\right)\left(x-\dfrac{-2+\sqrt{2}\,i}{3}\right)$

$=3\left(x+\dfrac{2+\sqrt{2}\,i}{3}\right)\left(x+\dfrac{2-\sqrt{2}\,i}{3}\right)$

6．次の 2 次方程式の 2 つの解の間に [　] 内の関係があるとき，定数 a の値，および 2 つの解を求めよ。　$x^2+ax+27=0$　[1 つの解が他の解の 3 倍]

解答　$a=-12$ のとき 2 つの解 3，9；$a=12$ のとき 2 つの解 -3，-9

解説

2 つの解は，α，3α と表すことができる。

解と係数の関係から　$\alpha+3\alpha=-a$，$\alpha\cdot3\alpha=27$

すなわち　$4\alpha=-a$，$\alpha^2=9$

$\alpha^2=9$ から　$\alpha=\pm3$

$\alpha=3$ のとき　$a=-4\alpha=-4\cdot3=-12$　　他の解は　$3\alpha=3\cdot3=9$

$\alpha=-3$ のとき　$a=-4\alpha=-4\cdot(-3)=12$　　他の解は　$3\alpha=3\cdot(-3)=-9$

よって，$a=-12$ のとき，2 つの解は　3，9

$a=12$ のとき，2 つの解は　-3，-9

7．次の 2 次方程式 (1) を解け。また，方程式 (2) が虚数解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1) $(2x-3)^2=x-2$　　(2) $x^2+mx+m+3=0$

解答　(1) $x=\dfrac{13\pm\sqrt{7}\,i}{8}$　　(2) $-2<m<6$

解説

(1) 左辺を展開して　$4x^2-12x+9=x-2$

整理すると　$4x^2-13x+11=0$

よって　$x=\dfrac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot4\cdot11}}{2\cdot4}=\dfrac{13\pm\sqrt{-7}}{8}=\dfrac{13\pm\sqrt{7}\,i}{8}$

(2) 判別式を D とすると

$D=m^2-4\cdot1\cdot(m+3)=m^2-4m-12=(m+2)(m-6)$

虚数解をもつための条件は　$D<0$

ゆえに　$(m+2)(m-6)<0$　　よって　$-2<m<6$

8．a は定数とする。2 次方程式 $x^2+2(3a-1)x+9a^2-4=0$ がともに正となるような実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

解答　$a<-\dfrac{2}{3}$

解説

2 つの解を α，β とし，判別式を D とする。

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-2(3a-1)$，$\alpha\beta=9a^2-4=(3a+2)(3a-2)$

また　$\dfrac{D}{4}=(3a-1)^2-(9a^2-4)=-6a+5$

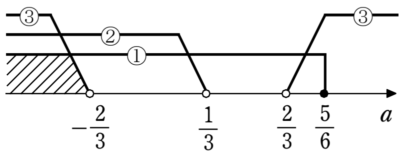
方程式の解がともに正であるための条件は　$D\geqq0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$

$D\geqq0$ から　$-6a+5\geqq0$　　よって　$a\leqq\dfrac{5}{6}$　……①

$\alpha+\beta>0$ から　$-2(3a-1)>0$　　よって　$a<\dfrac{1}{3}$　……②

$\alpha\beta>0$ から　$(3a+2)(3a-2)>0$

よって　$a<-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{3}<a$　……③



①，②，③ の共通範囲を求めて

$a<-\dfrac{2}{3}$

9．1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とする。$\omega^6+\omega^3+1$ の値を求めよ。

解答　3

解説

$\omega^3=1$ であるから $\omega^6+\omega^3+1=(\omega^3)^2+\omega^3+1=1^2+1+1=3$

10. 多項式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると -1 余り，$x+3$ で割ると 9 余る。このとき，$P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの余りを求めよ。

解答　$-2x+3$

解説

$P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの余りを $ax+b$ とし，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$$

等式の両辺に $x=2,\ -3$ を代入すると

$$P(2)=2a+b,\ P(-3)=-3a+b$$

また，$x-2$ で割った余りが -1，$x+3$ で割った余りが 9 であるから

$$P(2)=-1,\quad P(-3)=9$$

よって　$2a+b=-1,\ -3a+b=9$

これを解いて　$a=-2,\ b=3$

したがって，求める余りは　$-2x+3$

11. 次の方程式を解け。

(1)　$x^3=27$　　(2)　$x^4+4x^2-5=0$

解答　(1)　$x=3,\ \dfrac{-3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}$　　(2)　$x=\pm1,\ \pm\sqrt{5}\,i$

解説

(1)　方程式は　$x^3-27=0$

左辺を因数分解して　$(x-3)(x^2+3x+9)=0$

ゆえに　$x-3=0$　または　$x^2+3x+9=0$

$x^2+3x+9=0$ から　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot9}}{2}=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}$

よって　$x=3,\ \dfrac{-3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}$

(2))　左辺を因数分解して　$(x^2-1)(x^2+5)=0$

ゆえに　$x^2-1=0$　または　$x^2+5=0$

よって　$x=\pm1,\ \pm\sqrt{5}\,i$

12. 次の方程式を解け。$x^3+4x^2-x-22=0$

解答　$x=2,\ -3\pm\sqrt{2}\,i$

解説

$P(x)=x^3+4x^2-x-22$ とすると　$P(2)=2^3+4\cdot2^2-2-22=0$

よって，$P(x)$ は $x-2$ で割り切れるから割り算をすると

$P(x)=(x-2)(x^2+6x+11)$

$P(x)=0$ から　$x-2=0$　または　$x^2+6x+11=0$

$x^2+6x+11=0$ から　$x=-3\pm\sqrt{3^2-1\cdot11}=-3\pm\sqrt{2}\,i$

したがって　$x=2,\ -3\pm\sqrt{2}\,i$

13. 方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ の 1 つの解が $1+2i$ であるとき，実数の定数 $a,\ b$ の値と他の解を求めよ。

解答　$a=0,\ b=1$，他の解 $x=-2,\ 1-2i$

解説

$1+2i$ が解であるから

$$(1+2i)^3+a(1+2i)^2+b(1+2i)+10=0$$

ゆえに　$-11-2i+a(-3+4i)+b(1+2i)+10=0$

よって　$(-3a+b-1)+2(2a+b-1)i=0$

$a,\ b$ は実数であるから　$-3a+b-1=0,\ 2a+b-1=0$

これを解いて　$a=0,\ b=1$

このとき，方程式は　$x^3+x+10=0$

左辺を因数分解すると　$(x+2)(x^2-2x+5)=0$

これを解いて　$x=-2,\ 1\pm2i$

したがって，他の解は　$x=-2,\ 1-2i$

参考　係数が実数である方程式が虚数解 $a+bi$ をもつと，その共役な複素数 $a-bi$ も，この方程式の解である。本問の場合，$1+2i$ が解であるから，それと共役な複素数 $1-2i$ もこの方程式の解である。

14. x の方程式 $x^3-3x^2+ax+2-a=0$ について，方程式が異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$a<3$

解説

$P(x)=x^3-3x^2+ax+2-a$ とすると　$P(1)=1^3-3\cdot1^2+a\cdot1+2-a=0$

よって，$x=1$ は方程式 $P(x)=0$ の解である。

$P(x)=(x-1)(x^2-2x+a-2)$

と因数分解される。

$P(x)=0$ より　$x-1=0$　または

$x^2-2x+a-2=0$　……①

求める条件は，方程式①が $x\neq1$ である異なる 2 つの実数解をもつことである。

①が $x=1$ を解としてもたないから　$1^2-2\cdot1+a-2\neq0$　ゆえに　$a\neq3$

①の判別式は　$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-(a-2)=3-a$

$D>0$ から　$3-a>0$　よって　$a<3$　これは $a\neq3$ を満たす。