数学演習（高次方程式）Ｈ２１．１０．１６　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　)

１. 次の計算をし，結果を $a+bi$ の形で表せ。

(1) $(3-2i)(2+5i)$　　(2) $\dfrac{3+i}{2-i}+\dfrac{2-i}{3+i}$

２. 次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

$$(2+3i)x+(4+5i)y=6+7i$$

３. 2 次方程式 $x^2-3x+4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2$　　(2) $\alpha^3+\beta^3$　　(3) $\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\right)^2$

４. 和が 6，積が 13 となる 2 数を求めよ。

５. 2 次方程式 $x^2+2x-4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha+2$ と $\beta+2$ を 2 つの解とする 2 次方程式で，x^2 の係数が 1 であるものを求めよ。

６. 2 次方程式 $x^2+2(m-1)x+2m^2-5m-3=0$ の 2 つの解がともに正であるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

７. 多項式 $P(x)=3x^3-ax+b$ を $x-2$ で割ったときの余りが 24，$x+2$ で割ったときの　余りが -16 であるとき，係数 a，b の値を求めよ。

8．多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると -3 余り，$x+2$ で割ると 9 余る。$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

9．1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とする。次の値を求めよ。

(1) $\omega^6+\omega^3+1$　　(2) $\omega^{38}+\omega^{19}+1$

10．次の方程式を解け。

(1) $x^3=27$　　(2) $x^4+2x^2-8=0$　　(3) $x^3-3x^2-10x+24=0$

11．3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ の 1 つの解が $x=2+i$ であるとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

数学演習（高次方程式）Ｈ２１．１０．１６

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１. 次の計算をし，結果を $a+bi$ の形で表せ。

(1) $(3-2i)(2+5i)$　　　(2) $\dfrac{3+i}{2-i}+\dfrac{2-i}{3+i}$

解答　(1) $16+11i$　　(2) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$

(1) $(3-2i)(2+5i)=6+(15-4)i-10i^2$
$=6+11i-10\cdot(-1)$
$=6+11i+10$
$=16+11i$

(2) $\dfrac{3+i}{2-i}+\dfrac{2-i}{3+i}=\dfrac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}+\dfrac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$
$=\dfrac{6+(3+2)i+i^2}{2^2-i^2}+\dfrac{6-(2+3)i+i^2}{3^2-i^2}$
$=\dfrac{5+5i}{5}+\dfrac{5-5i}{10}=1+i+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$
$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$

２. 次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

$$(2+3i)x+(4+5i)y=6+7i$$

解答　$x=-1$，$y=2$

与えられた等式の左辺を i について整理して

$2x+4y+(3x+5y)i=6+7i$

x，y は実数であるから，$2x+4y$，$3x+5y$ も実数である。

よって　$\begin{cases}2x+4y=6\\3x+5y=7\end{cases}$　から　$\begin{cases}x+2y=3 & \cdots\cdots①\\3x+5y=7 & \cdots\cdots②\end{cases}$

①×3−② から　$y=2$　このとき，① から　$x=-1$

別解　等式を変形して　$2(x+2y-3)+(3x+5y-7)i=0$

$2(x+2y-3)$，$3x+5y-7$ は実数であるから

$2(x+2y-3)=0$，$3x+5y-7=0$

これを解いて　$x=-1$，$y=2$

３. 2 次方程式 $x^2-3x+4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2$　　(2) $\alpha^3+\beta^3$　　(3) $\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\right)^2$

解答　(1) 1　(2) -9　(3) $-\dfrac{7}{16}$

解と係数の関係により　$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=4$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot4=1$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3^3-3\cdot4\cdot3=-9$

(3) $\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\right)^2=\left(\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}\right)^2=\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha\beta)^2}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}=\dfrac{3^2-4\cdot4}{4^2}=-\dfrac{7}{16}$

４. 和が 6，積が 13 となる 2 数を求めよ。

解答　$3+2i$，$3-2i$

求める 2 数を α，β とする。

$\alpha+\beta=6$，$\alpha\beta=13$ であるから，α，β は 2 次方程式 $x^2-6x+13=0$ の 2 つの解である。

この方程式を解くと　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot13}}{1}=3\pm2i$

よって，求める 2 数は　$3+2i$，$3-2i$

５. 2 次方程式 $x^2+2x-4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha+2$ と $\beta+2$ を 2 つの解とする 2 次方程式で，x^2 の係数が 1 であるものを求めよ。

解答　$x^2-2x-4=0$

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=-4$

よって　$(\alpha+2)+(\beta+2)=(\alpha+\beta)+4$
$=-2+4=2$
$(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$
$=-4+2\cdot(-2)+4=-4$

したがって，求める 2 次方程式は　$x^2-2x-4=0$

６. 2 次方程式 $x^2+2(m-1)x+2m^2-5m-3=0$ の 2 つの解がともに正であるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

解答　$-1\leqq m<-\dfrac{1}{2}$

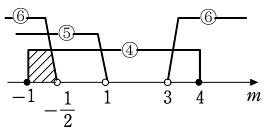
この 2 次方程式の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とする。

$\dfrac{D}{4}=(m-1)^2-(2m^2-5m-3)=-m^2+3m+4$
$=-(m^2-3m-4)=-(m+1)(m-4)$

方程式の 2 つの解がともに正であるための条件は，次の ①，②，③ が同時に成り立つことである。

$D\geqq0$ すなわち $-(m+1)(m-4)\geqq0$　……①
$\alpha+\beta=-2(m-1)>0$　……②
$\alpha\beta=2m^2-5m-3=(m-3)(2m+1)>0$　……③

① から　$-1\leqq m\leqq4$　……④
② から　$m<1$　……⑤
③ から　$m<-\dfrac{1}{2}$，$3<m$　……⑥

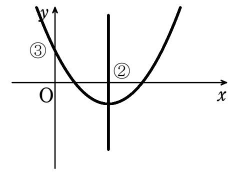


④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて

$-1\leqq m<-\dfrac{1}{2}$

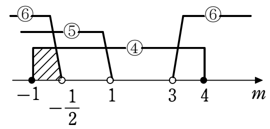
別解　$y=x^2+2(m-1)x+2m^2-5m-3$ のグラフが x軸の $x>0$ の部分のみで交わればよい。

よって
$y=x^2+2(m-1)x+2m^2-5m-3$
$=\{x+(m-1)\}^2-(m-1)^2+2m^2-5m-3$
$=\{x+(m-1)\}^2+m^2-3m-4$



より
$D\geqq0$ すなわち $-(m+1)(m-4)\geqq0$　……①
軸 $=-(m-1)>0$　……②
$x=0$ のときの y座標 $=2m^2-5m-3=(m-3)(2m+1)>0$　……③
の 3 つが成り立てばよく，

① から　$-1\leqq m\leqq4$　……④
② から　$m<1$　……⑤
③ から　$m<-\dfrac{1}{2}$，$3<m$　……⑥



④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて

$-1\leqq m<-\dfrac{1}{2}$

７. 多項式 $P(x)=3x^3-ax+b$ を $x-2$ で割ったときの余りが 24，$x+2$ で割ったときの余りが -16 であるとき，係数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=2$，$b=4$

問題の条件から　$P(2)=24$ かつ $P(-2)=-16$

$P(2)=24$　より　$3\cdot2^3-a\cdot2+b=24$

$P(-2)=-16$ より　$3(-2)^3-a(-2)+b=-16$

整理すると　$2a-b=0$，$2a+b=8$

この連立方程式を解くと　$a=2$，$b=4$

8. 多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると -3 余り，$x+2$ で割ると 9 余る。$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$ $-4x+1$

$P(x)$ を 2 次式 $(x-1)(x+2)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$$

等式の両辺に $x=1,\ -2$ を代入すると

$$P(1)=0\cdot3\cdot Q(1)+a\cdot1+b$$
$$P(-2)=(-3)\cdot0\cdot Q(-2)+a(-2)+b$$

すなわち　$P(1)=a+b,\quad P(-2)=-2a+b$

また　$P(x)$ を $x-1$ で割った余りが -3，

$P(x)$ を $x+2$ で割った余りが 9

であるから　$P(1)=-3,\quad P(-2)=9$

よって　$a+b=-3,\quad -2a+b=9$

この連立方程式を解いて　$a=-4,\ b=1$

したがって，求める余りは　$-4x+1$

9. 1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とする。次の値を求めよ。

(1) $\omega^6+\omega^3+1$　　(2) $\omega^{38}+\omega^{19}+1$

$\boxed{\text{解答}}$ (1) 3　(2) 0

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$ であるから

(1) $\omega^6+\omega^3+1=(\omega^3)^2+\omega^3+1=1^2+1+1=3$

(2) $\omega^{38}+\omega^{19}+1=(\omega^3)^{12}\cdot\omega^2+(\omega^3)^6\cdot\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$

10. 次の方程式を解け。

(1) $x^3=27$　(2) $x^4+2x^2-8=0$　(3) $x^3-3x^2-10x+24=0$

$\boxed{\text{解答}}$ (1) $x=3,\ \dfrac{-3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}$　(2) $x=\pm2i,\ \pm\sqrt{2}$　(3) $x=-3,\ 2,\ 4$

(1) $x^3-3^3=0$ から　$(x-3)(x^2+3x+9)=0$

ゆえに　$x-3=0$　または　$x^2+3x+9=0$

したがって　$x=3,\ \dfrac{-3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}$

(2) $x^4+2x^2-8=0$ から　$(x^2+4)(x^2-2)=0$

ゆえに　$x^2+4=0$　，$x^2-2=0$

したがって　$x=\pm2i,\ \pm\sqrt{2}$

(3) $P(x)=x^3-3x^2-10x+24$ とおくと　$P(2)=0$

$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつので，

$P(x)$ を $x-2$ で割ると商が x^2-x-12 より

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x^2-x-12 \\ \cline{2-2}
x-2\big) & x^3-3x^2-10x+24 \\
 & x^3-2x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad -x^2-10x \\
 & \quad -x^2+\ 2x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad -12x+24 \\
 & \qquad\quad -12x+24 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$P(x)=(x-2)(x^2-x-12)$$
$$=(x-2)(x+3)(x-4)$$

よって　$(x-2)(x+3)(x-4)=0$

したがって　$x=-3,\ 2,\ 4$

11. 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ の 1 つの解が $x=2+i$ であるとき，実数の定数 $a,\ b$ の値と他の解を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$ $a=-2,\ b=-3$，他の解は $x=-2,\ 2-i$

$x=2+i$ がこの方程式の解であるから

$$(2+i)^3+a(2+i)^2+b(2+i)+10=0$$

ここで，$(2+i)^3=2^3+3\cdot2^2i+3\cdot2i^2+i^3=2+11i$，

$(2+i)^2=2^2+2\cdot2i+i^2=3+4i$　　であるから

$$2+11i+a(3+4i)+b(2+i)+10=0$$

i について整理すると　$3a+2b+12+(4a+b+11)i=0$

$3a+2b+12,\ 4a+b+11$ は実数であるから　$3a+2b+12=0,\ 4a+b+11=0$

これを解いて　$a=-2,\ b=-3$

ゆえに，方程式は　$x^3-2x^2-3x+10=0$

$f(x)=x^3-2x^2-3x+10$ とすると

$$f(-2)=(-2)^3-2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+10=0$$

よって，$f(x)$ は $x+2$ を因数にもつから

$$f(x)=(x+2)(x^2-4x+5)$$

したがって，方程式は　$(x+2)(x^2-4x+5)=0$

ゆえに　$x+2=0$　または　$x^2-4x+5=0$

$x^2-4x+5=0$ を解くと　$x=2\pm i$

よって，他の解は　$x=-2,\ 2-i$

$\boxed{\text{別解}}$ 1　実数を係数とする 3 次方程式が虚数解 $2+i$ をもつから，共役な複素数 $2-i$ もこの方程式の解である。

$$(2+i)+(2-i)=4,\quad (2+i)(2-i)=5$$

ゆえに，$2+i,\ 2-i$ を解とする 2 次方程式は　$x^2-4x+5=0$

よって，$x^3+ax^2+bx+10$ は x^2-4x+5 で割り切れる。

右の割り算における余り

$$(4a+b+11)x-5a-10$$

が 0 に等しいから

$$\begin{cases}4a+b+11=0\\-5a-10=0\end{cases}$$

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x+(a+4) \\ \cline{2-2}
x^2-4x+5\big) & x^3+\ ax^2+\qquad bx+10 \\
 & x^3-\ 4x^2+\qquad 5x \\ \cline{2-2}
 & (a+4)x^2+\ (b-5)x+10 \\
 & (a+4)x^2-4(a+4)x+5(a+4) \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad (4a+b+11)x-5a-10
\end{array}$$

これを解いて　$a=-2,\ b=-3$

このとき，方程式は

$$(x^2-4x+5)(x+2)=0$$

よって　$x^2-4x+5=0$　または　$x+2=0$

ゆえに　$x=2\pm i,\ -2$

したがって，他の解は　$x=2-i,\ -2$

$\boxed{\text{別解}}$ 2　実数を係数とする 3 次方程式が虚数解 $2+i$ をもつから，共役な複素数 $2-i$ もこの方程式の解である。

残りの解を k とおくと，3 次方程式の解と係数の関係から

$$(2+i)+(2-i)+k=-a\quad\cdots\cdots①$$
$$(2+i)(2-i)+(2-i)k+k(2+i)=b\quad\cdots\cdots②$$
$$(2+i)(2-i)k=-10\quad\cdots\cdots③$$

③ から　$5k=-10$　　ゆえに　$k=-2$

よって，他の解は　$x=2-i,\ -2$

① から　$a=-(4+k)=-2$

② から　$b=5+4k=-3$