数学演習（複素数の計算･２次方程式）Ｒ１．５．２７　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の計算をせよ。

(1) $(4+5i)-(3-2i)$　(2) $(2+i)^2$　(3) $(2+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})$

(4) $\dfrac{2+5i}{3-2i}$　(5) $\dfrac{3+2i}{2+i}-\dfrac{i}{1-2i}$

$\boxed{2}$ (1) 次の等式を満たす実数 x，y の値を，それぞれ求めよ。

（ア） $(3+2i)x+2(1-i)y=17-2i$　（イ） $(1+xi)(3-7i)=1+yi$

(2) $\dfrac{1+xi}{3+i}$ が （ア） 実数 （イ） 純虚数 となるように，実数 x の値を定めよ。

$\boxed{3}$ 次の計算をせよ。

(1) $(\sqrt{3}+i)^4+(\sqrt{3}-i)^4$　(2) $i+i^2+i^3+\cdots\cdots+i^{50}$

$\boxed{4}$ 2乗すると i になるような複素数 z を求めよ。

$\boxed{5}$ 次の2次方程式を解け。

(1) $4x^2-8x+3=0$　(2) $3x^2-5x+4=0$

(3) $2x(3-x)=2x+3$　(4) $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{3}=0$

(5) $(2+\sqrt{3})x^2+2(\sqrt{3}+1)x+2=0$

$\boxed{6}$ 次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ。ただし，k は定数とする。

(1) $x^2-3x+1=0$　(2) $4x^2-12x+9=0$　(3) $-13x^2+12x-3=0$

(4) $x^2-(k-3)x+k^2+4=0$　(5) $x^2-(k-2)x+\dfrac{k}{2}+5=0$

$\boxed{7}$ 2 次方程式 $x^2+4ax+5-a=0$ …… ①，$x^2+3x+3a^2=0$ …… ② について，次の条件を満たす定数 a の値の範囲を求めよ。

(1) ①，② がどちらも実数解をもたない。

(2) ①，② の一方だけが虚数解をもつ。

$\boxed{8}$ x の方程式 $(i+1)x^2+(k+i)x+ki+1=0$ が実数解をもつとき，実数 k の値を求めよ。ただし，$i^2=-1$ とする。

数学演習（複素数の計算･２次方程式）Ｒ１．５．２７　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1 次の計算をせよ。

(1) $(4+5i)-(3-2i)$　(2) $(2+i)^2$　(3) $(2+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})$

(4) $\dfrac{2+5i}{3-2i}$　(5) $\dfrac{3+2i}{2+i}-\dfrac{i}{1-2i}$

解答 (1) $1+7i$　(2) $3+4i$　(3) $11+\sqrt{5}\,i$　(4) $-\dfrac{4}{13}+\dfrac{19}{13}i$　(5) 2

解説

(1) $(4+5i)-(3-2i)=4+5i-3+2i=(4-3)+(5+2)i=1+7i$

(2) $(2+i)^2=4+4i+i^2=4+4i+(-1)=3+4i$

(3) $(2+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})=(2+\sqrt{5}\,i)(3-\sqrt{5}\,i)$
$=2\cdot3-2\sqrt{5}\,i+3\sqrt{5}\,i-(\sqrt{5})^2i^2$
$=6+\sqrt{5}\,i-5\cdot(-1)=11+\sqrt{5}\,i$

(4) $\dfrac{2+5i}{3-2i}=\dfrac{(2+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{6+4i+15i+10i^2}{9-4i^2}=\dfrac{6+19i+10\cdot(-1)}{9-4\cdot(-1)}$
$=\dfrac{-4+19i}{13}=-\dfrac{4}{13}+\dfrac{19}{13}i$

(5) $\dfrac{3+2i}{2+i}-\dfrac{i}{1-2i}=\dfrac{(3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}-\dfrac{i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$
$=\dfrac{6-3i+4i-2i^2}{4-i^2}-\dfrac{i+2i^2}{1-4i^2}$
$=\dfrac{6+i-2\cdot(-1)}{4-(-1)}-\dfrac{i+2\cdot(-1)}{1-4\cdot(-1)}$
$=\dfrac{8+i}{5}-\dfrac{i-2}{5}=\dfrac{10}{5}=2$

2 (1) 次の等式を満たす実数 x，y の値を，それぞれ求めよ。

(ア) $(3+2i)x+2(1-i)y=17-2i$　(イ) $(1+xi)(3-7i)=1+yi$

(2) $\dfrac{1+xi}{3+i}$ が (ア) 実数 (イ) 純虚数 となるように，実数 x の値を定めよ。

解答 (1) (ア) $x=3$，$y=4$　(イ) $x=-\dfrac{2}{7}$，$y=-\dfrac{55}{7}$

(2) (ア) $x=\dfrac{1}{3}$　(イ) $x=-3$

解説

(1) (ア) 等式を変形すると　$(3x+2y)+(2x-2y)i=17-2i$
x，y は実数であるから，$3x+2y$ と $2x-2y$ も実数である。
よって　$3x+2y=17$ …… ①，$2x-2y=-2$ …… ②
①，② を連立して解くと　$x=3$，$y=4$

(イ) 等式を変形すると　$(7x+3)+(3x-7)i=1+yi$
x，y は実数であるから，$7x+3$ と $3x-7$ も実数である。
よって　$7x+3=1$ …… ①，$3x-7=y$ …… ②
①，② を連立して解くと　$x=-\dfrac{2}{7}$，$y=-\dfrac{55}{7}$

(2) $\dfrac{1+xi}{3+i}=\dfrac{(1+xi)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{3+(3x-1)i-xi^2}{9-i^2}$
$=\dfrac{x+3}{10}+\dfrac{3x-1}{10}i$ …… ①

x は実数であるから，$\dfrac{x+3}{10}$ と $\dfrac{3x-1}{10}$ も実数である。

(ア) ① が実数となるための条件は，$3x-1=0$ から　$x=\dfrac{1}{3}$

(イ) ① が純虚数となるための条件は
$x+3=0$ かつ $3x-1\neq0$
$x+3=0$ から　$x=-3$　これは $3x-1\neq0$ を満たす。

3 次の計算をせよ。

(1) $(\sqrt{3}+i)^4+(\sqrt{3}-i)^4$　(2) $i+i^2+i^3+\cdots\cdots+i^{50}$

解答 (1) -16　(2) $i-1$

解説

(1) $\sqrt{3}+i=x$，$\sqrt{3}-i=y$ とおくと
$(\sqrt{3}+i)^4+(\sqrt{3}-i)^4=x^4+y^4$
ここで　$x+y=(\sqrt{3}+i)+(\sqrt{3}-i)=2\sqrt{3}$，
$xy=(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)=(\sqrt{3})^2-i^2=4$
ゆえに　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{3})^2-2\cdot4=4$
よって　$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=4^2-2\cdot4^2=-16$

(2) $i^2=-1$，$i^3=i\cdot i^2=-i$，$i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$ であるから
$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$
よって　$i+i^2+i^3+\cdots\cdots+i^{50}$
$=i+i^2+i^3+i^4+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+i^8(i+i^2+i^3+i^4)$
$+\cdots\cdots+i^{44}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{49}+i^{50}$
$=i^{49}+i^{50}=(i^2)^{24}i+(i^2)^{25}=(-1)^{24}i+(-1)^{25}=i-1$

4 2 乗すると i になるような複素数 z を求めよ。

解答 $z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

解説

$z=x+yi$（x，y は実数）とすると
$z^2=(x+yi)^2=x^2+2xyi+y^2i^2=x^2-y^2+2xyi$
$z^2=i$ のとき　$x^2-y^2+2xyi=i$
x，y は実数であるから，x^2-y^2 と $2xy$ も実数である。
したがって　$x^2-y^2=0$ …… ①，$2xy=1$ …… ②
① から　$(x+y)(x-y)=0$　よって　$y=\pm x$

[1] $y=x$ のとき，② から　$2x^2=1$　ゆえに　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$y=x$ から　$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，
$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　$y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

[2] $y=-x$ のとき，② から　$-2x^2=1$
これを満たす実数 x は存在しない。

以上から　$z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

5 次の 2 次方程式を解け。

(1) $4x^2-8x+3=0$　(2) $3x^2-5x+4=0$

(3) $2x(3-x)=2x+3$　(4) $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{3}=0$

(5) $(2+\sqrt{3})x^2+2(\sqrt{3}+1)x+2=0$

解答 (1) $x=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}$　(2) $x=\dfrac{5\pm\sqrt{23}\,i}{6}$　(3) $x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}\,i}{2}$

(4) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{105}}{12}$　(5) $x=-\sqrt{3}+1$

解説

(1) 左辺を因数分解して　$(2x-1)(2x-3)=0$
よって　$x=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}$

(2) $x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot4}}{2\cdot3}=\dfrac{5\pm\sqrt{-23}}{6}=\dfrac{5\pm\sqrt{23}\,i}{6}$

(3) 与式を整理して　$2x^2-4x+3=0$
よって　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot3}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{2}\,i}{2}$

(4) 両辺に 12 を掛けて　$6x^2+3x-4=0$
よって　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot6\cdot(-4)}}{2\cdot6}=\dfrac{-3\pm\sqrt{105}}{12}$

(5) 両辺に $2-\sqrt{3}$ を掛けて
$x^2+2(\sqrt{3}-1)x+2(2-\sqrt{3})=0$
よって　$x=-(\sqrt{3}-1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2-2(2-\sqrt{3})}$
$=-(\sqrt{3}-1)\pm\sqrt{4-2\sqrt{3}-4+2\sqrt{3}}$
$=-\sqrt{3}+1$

$\boxed{6}$ 次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ。ただし，k は定数とする。

(1) $x^2-3x+1=0$ (2) $4x^2-12x+9=0$ (3) $-13x^2+12x-3=0$

(4) $x^2-(k-3)x+k^2+4=0$ (5) $x^2-(k-2)x+\dfrac{k}{2}+5=0$

解答 (1) 異なる 2 つの実数解 (2) 重解 (3) 異なる 2 つの虚数解
(4) 異なる 2 つの虚数解
(5) $k<-2$，$8<k$ のとき異なる 2 つの実数解；$k=-2$，8 のとき重解；
$-2<k<8$ のとき異なる 2 つの虚数解

解説

与えられた 2 次方程式の判別式を D とする。

(1) $D=(-3)^2-4\cdot1\cdot1=5>0$

よって，異なる 2 つの実数解をもつ。

(2) $\dfrac{D}{4}=(-6)^2-4\cdot9=0$ よって，重解をもつ。

(3) $\dfrac{D}{4}=6^2-(-13)\cdot(-3)=-3<0$

よって，異なる 2 つの虚数解をもつ。

(4) $D=\{-(k-3)\}^2-4\cdot1\cdot(k^2+4)=-3k^2-6k-7=-3(k+1)^2-4$

ゆえに，すべての実数 k について $D<0$

よって，異なる 2 つの虚数解をもつ。

(5) $D=\{-(k-2)\}^2-4\cdot1\cdot\left(\dfrac{k}{2}+5\right)=k^2-6k-16=(k+2)(k-8)$

よって，方程式の解は次のようになる。

$D>0$ すなわち $k<-2$，$8<k$ のとき 異なる 2 つの実数解

$D=0$ すなわち $k=-2$，8 のとき 重解

$D<0$ すなわち $-2<k<8$ のとき 異なる 2 つの虚数解

$\boxed{7}$ 2 次方程式 $x^2+4ax+5-a=0$ ……①，$x^2+3x+3a^2=0$ ……② について，次の条件を満たす定数 a の値の範囲を求めよ。

(1) ①，② がどちらも実数解をもたない。

(2) ①，② の一方だけが虚数解をもつ。

解答 (1) $-\dfrac{5}{4}<a<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<a<1$

(2) $a\leqq-\dfrac{5}{4}$，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$1\leqq a$

解説

①，② の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると

$$\frac{D_1}{4}=(2a)^2-1\cdot(5-a)=4a^2+a-5=(a-1)(4a+5)$$

$$D_2=3^2-4\cdot1\cdot3a^2=-3(4a^2-3)$$

(1) 求める条件は，①，② のどちらも虚数解をもつときであるから

$D_1<0$ かつ $D_2<0$

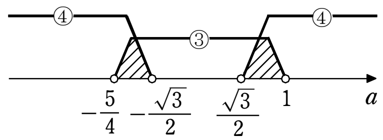
$D_1<0$ から $(a-1)(4a+5)<0$

ゆえに $-\dfrac{5}{4}<a<1$ …… ③

$D_2<0$ から $4a^2-3>0$ すなわち $(2a+\sqrt{3})(2a-\sqrt{3})>0$

よって

$a<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<a$ …… ④

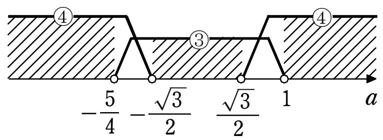


求める a の値の範囲は，③，④ の共通範囲を求めて

$-\dfrac{5}{4}<a<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<a<1$

(2) ①，② の一方だけが虚数解をもつための条件は，$D_1<0$，$D_2<0$ の一方だけが成り立つことである。

ゆえに，③，④ の一方だけが成り立つ a の値の範囲を求めて



$a\leqq-\dfrac{5}{4}$，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$1\leqq a$

$\boxed{8}$ x の方程式 $(i+1)x^2+(k+i)x+ki+1=0$ が実数解をもつとき，実数 k の値を求めよ。ただし，$i^2=-1$ とする。

解答 $k=-2$

解説

方程式の実数解を $x=\alpha$ とすると

$$(i+1)\alpha^2+(k+i)\alpha+ki+1=0$$

i について整理すると $(\alpha^2+k\alpha+1)+(\alpha^2+\alpha+k)i=0$

$\alpha^2+k\alpha+1$，$\alpha^2+\alpha+k$ は実数であるから

$\alpha^2+k\alpha+1=0$ ……①，$\alpha^2+\alpha+k=0$ ……②

①－② から $(k-1)\alpha+1-k=0$

よって $(k-1)(\alpha-1)=0$ ゆえに $k=1$ または $\alpha=1$

[1] $k=1$ のとき，①，② はともに $\alpha^2+\alpha+1=0$

判別式を D とすると $D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3$

$D<0$ であるから，α は虚数解となり，条件に適さない。

[2] $\alpha=1$ のとき，② から $k=-2$ これは ① も満たす。

したがって $k=-2$

別解 [①，② を導くところまでは同じ]

② から $k=-\alpha^2-\alpha$ …… ③

① に代入して整理すると $\alpha^3-1=0$

ゆえに $(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

α は実数であるから $\alpha^2+\alpha+1=\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

よって $\alpha-1=0$ すなわち $\alpha=1$

このとき，③ から $k=-2$