数学演習（複素数と方程式）Ｈ２４．２．１　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

１．次の計算をせよ。　$\dfrac{1-3i}{1+3i}+\dfrac{1+3i}{1-3i}$

２．次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。$(1-2i)(x+yi)=2+6i$

３．次の２次方程式の２つの解の間に［　］内の関係があるとき，定数 a の値，および２つの解を求めよ。　$x^2+(a+1)x-a=0$　［２つの解の比が $2:3$］

４．x^4-x^2-12を，係数の範囲が，(ア)　有理数　(イ)　実数　(ウ)　複素数　の各場合について因数分解せよ。

５．和 4，積 9であるような２つの数を求めよ。

６．x^3+5x^2+ax+2 を $x-2$ で割ると余りが２であるように，定数 a の値を定めよ。

７．a は定数とする。２次方程式 $x^2+2(3a-1)x+9a^2-4=0$ がともに負である実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

８．多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると -3 余り，$x+2$ で割ると９余る。$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

9．次の方程式を解け。

(1)　$x^3-4x^2+6x=0$　　(2)　$x^3=-8$　　(3)　$16x^4=1$

(4)　$x^3+5x^2+3x-1=0$　　(5)　$8x^3+4x-3=0$

10. 1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とする。次の式の値を求めよ。

(1)　$\omega^{100}+\omega^{50}$　　(2)　$\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}$

11. 方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ の 1 つの解が $1+2i$ であるとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

12. 3 次方程式 $x^3-(a+3)x^2+9a=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$x=3$ を解にもつことを示せ。

(2)　この方程式が 3 を 2 重解としてもつように，定数 a の値を定めよ。

(3)　この方程式が 3 以外の解を 2 重解としてもつように，定数 a の値を定めよ。

1．次の計算をせよ。　$\dfrac{1-3i}{1+3i}+\dfrac{1+3i}{1-3i}$

解答　$-\dfrac{8}{5}$

解説

$(与式)=\dfrac{(1-3i)^2+(1+3i)^2}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{(1-6i+9i^2)+(1+6i+9i^2)}{1-9i^2}=-\dfrac{8}{5}$

2．次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。$(1-2i)(x+yi)=2+6i$

解答　$x=-2$，$y=2$

解説

等式の左辺を i について整理すると　$x+2y+(-2x+y)i=2+6i$

$x+2y$，$-2x+y$ は実数であるから　$x+2y=2$，$-2x+y=6$

これを解いて　$x=-2$，$y=2$

別解　等式から　$x+yi=\dfrac{2+6i}{1-2i}$

$\dfrac{2+6i}{1-2i}=\dfrac{(2+6i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{2+(4+6)i+12i^2}{1-4i^2}=\dfrac{-10+10i}{5}=-2+2i$ であるから

$x+yi=-2+2i$

x，y は実数であるから　$x=-2$，$y=2$

3．次の２次方程式の２つの解の間に［ ］内の関係があるとき，定数 a の値，および２つの解を求めよ。　$x^2+(a+1)x-a=0$　［２つの解の比が $2:3$］

解答　$a=-6$ のとき２つの解は 2，3；$a=-\dfrac{1}{6}$ のとき２つの解 $-\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{1}{2}$

解説

２つの解は，2α，$3\alpha\ (\alpha\neq 0)$ と表すことができる。

解と係数の関係から　$2\alpha+3\alpha=-(a+1)$，$2\alpha\cdot 3\alpha=-a$

すなわち　$5\alpha+1=-a$，$6\alpha^2=-a$

a を消去すると　$6\alpha^2-5\alpha-1=0$

ゆえに　$(\alpha-1)(6\alpha+1)=0$　よって　$\alpha=1,\ -\dfrac{1}{6}$

$\alpha=1$ のとき　$a=-6\alpha^2=-6\cdot 1^2=-6$

また，２つの解は　$2\alpha=2\cdot 1=2$，$3\alpha=3\cdot 1=3$

$\alpha=-\dfrac{1}{6}$ のとき　$a=-6\alpha^2=-6\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\right)^2=-\dfrac{1}{6}$

また，２つの解は　$2\alpha=2\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\right)=-\dfrac{1}{3}$，$3\alpha=3\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$

したがって　$a=-6$　のとき，２つの解は　2，3

$a=-\dfrac{1}{6}$ のとき，２つの解は　$-\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{1}{2}$

4．x^4-x^2-12を，係数の範囲が，(ア)　有理数　(イ)　実数　(ウ)　複素数　の各場合について因数分解せよ。

解答　(ア)，(イ)　$(x+2)(x-2)(x^2+3)$

(ウ)　$(x+2)(x-2)(x+\sqrt{3}\,i)(x-\sqrt{3}\,i)$

解説

$(与式)=(x^2-4)(x^2+3)=(x+2)(x-2)(x^2+3)$

$=(x+2)(x-2)(x+\sqrt{3}\,i)(x-\sqrt{3}\,i)$

ゆえに2，-2，3は有理数であり実数であるから　(ア)，(イ)　$(x+2)(x-2)(x^2+3)$

また複素数はiを用いて表される数なので

(ウ)　$(x+2)(x-2)(x+\sqrt{3}\,i)(x-\sqrt{3}\,i)$

5．和４，積９であるような２つの数を求めよ。

解答　$2+\sqrt{5}\,i$，$2-\sqrt{5}\,i$

解説

求める２数は，$x^2-4x+9=0$ の解である。

この方程式を解くと　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 9}}{1}=2\pm\sqrt{5}\,i$

よって　$2+\sqrt{5}\,i$，$2-\sqrt{5}\,i$

6．x^3+5x^2+ax+2 を $x-2$ で割ると余りが２であるように，定数 a の値を定めよ。

解答　$a=-14$

解説

$P(x)=x^3+5x^2+ax+2$ とおく。

$P(x)$ を $x-2$ で割った余りが２であるための条件は

$P(2)=2$　すなわち　$2^3+5\cdot 2^2+a\cdot 2+2=2$

ゆえに　$2a+30=2$　よって　$a=-14$

7．a は定数とする。２次方程式 $x^2+2(3a-1)x+9a^2-4=0$ がともに負である実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

解答　$\dfrac{2}{3}<a\leqq\dfrac{5}{6}$

解説

２つの解を α，β とし，判別式を D とする。

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-2(3a-1)$，$\alpha\beta=9a^2-4=(3a+2)(3a-2)$

また　$\dfrac{D}{4}=(3a-1)^2-(9a^2-4)=-6a+5$

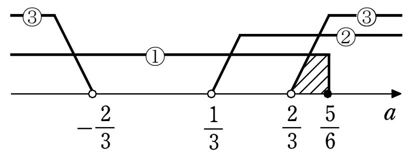
方程式の解がともに負であるための条件は　$D\geqq 0$，$\alpha+\beta<0$，$\alpha\beta>0$

$D\geqq 0$ から　$-6a+5\geqq 0$　よって　$a\leqq\dfrac{5}{6}$　……①

$\alpha+\beta<0$ から　$-2(3a-1)<0$　よって　$a>\dfrac{1}{3}$　……②

$\alpha\beta>0$ から　$(3a+2)(3a-2)>0$

よって　$a<-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{3}<a$　……③



①，②，③ の共通範囲を求めて

$\dfrac{2}{3}<a\leqq\dfrac{5}{6}$

8．多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると -3 余り，$x+2$ で割ると９余る。$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

解答　$-4x+1$

解説

$P(x)$ を２次式 $(x-1)(x+2)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$

等式の両辺に $x=1$，-2 を代入すると

$P(1)=0\cdot 3\cdot Q(1)+a\cdot 1+b$

$P(-2)=(-3)\cdot 0\cdot Q(-2)+a(-2)+b$

すなわち　$P(1)=a+b$，　$P(-2)=-2a+b$

また　$P(x)$ を $x-1$ で割った余りが -3，

$P(x)$ を $x+2$ で割った余りが 9

であるから　$P(1)=-3$，　$P(-2)=9$

よって　$a+b=-3$，　$-2a+b=9$

この連立方程式を解いて　$a=-4$，$b=1$

したがって，求める余りは　$-4x+1$

9．次の方程式を解け。

(1)　$x^3-4x^2+6x=0$　(2)　$x^3=-8$　(3)　$16x^4=1$

(4)　$x^3+5x^2+3x-1=0$　(5)　$8x^3+4x-3=0$

解答　(1)　$x=0,\ 2\pm\sqrt{2}\,i$　(2)　$x=-2,\ 1\pm\sqrt{3}\,i$　(3)　$x=\pm\frac{1}{2}i,\ \pm\frac{1}{2}$

(4)　$x=-1,\ -2\pm\sqrt{5}$　(5)　$x=\frac{1}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{11}\,i}{4}$

解説

(1)　左辺を因数分解して　$x(x^2-4x+6)=0$

ゆえに　$x=0$　または　$x^2-4x+6=0$

$x^2-4x+6=0$ から　$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot6}=2\pm\sqrt{2}\,i$

よって　$x=0,\ 2\pm\sqrt{2}\,i$

(2)　方程式は　$x^3+8=0$

左辺を因数分解して　$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

ゆえに　$x+2=0$　または　$x^2-2x+4=0$

$x^2-2x+4=0$ から　$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot4}=1\pm\sqrt{3}\,i$

よって　$x=-2,\ 1\pm\sqrt{3}\,i$

(3)　方程式は　$16x^4-1=0$

左辺を因数分解して　$(4x^2+1)(4x^2-1)=0$

ゆえに　$4x^2+1=0$　または　$4x^2-1=0$

すなわち　$x^2=-\frac{1}{4}$　または　$x^2=\frac{1}{4}$

よって　$x=\pm\frac{1}{2}i,\ \pm\frac{1}{2}$

(4)　$P(x)=x^3+5x^2+3x-1$ とすると　$P(-1)=(-1)^3+5(-1)^2+3(-1)-1=0$

よって，$P(x)$ は $x+1$ で割り切れるから割り算をすると

$P(x)=(x+1)(x^2+4x-1)$

$P(x)=0$ から　$x+1=0$　または　$x^2+4x-1=0$

$x^2+4x-1=0$ から　$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot(-1)}=-2\pm\sqrt{5}$

したがって　$x=-1,\ -2\pm\sqrt{5}$

(5)　$P(x)=8x^3+4x-3$ とすると　$P\left(\frac{1}{2}\right)=8\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\cdot\frac{1}{2}-3=0$

よって，$P(x)$ は $2x-1$ で割り切れるから割り算をすると

$P(x)=(2x-1)(4x^2+2x+3)$

$P(x)=0$ から　$2x-1=0$　または　$4x^2+2x+3=0$

$4x^2+2x+3=0$ から　$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot3}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{11}\,i}{4}$

したがって　$x=\frac{1}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{11}\,i}{4}$

10．1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とする。次の式の値を求めよ。

(1)　$\omega^{100}+\omega^{50}$　(2)　$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}$

解答　(1)　-1　(2)　-1

解説

ω は 1 の 3 乗根であるから，$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$ が成り立つ。

(1)　$\omega^{100}+\omega^{50}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega+(\omega^3)^{16}\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

(2)　$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

11．方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ の 1 つの解が $1+2i$ であるとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

解答　$a=0$，$b=1$，他の解 $x=-2,\ 1-2i$

解説

$1+2i$ が解であるから

$(1+2i)^3+a(1+2i)^2+b(1+2i)+10=0$

ゆえに　$-11-2i+a(-3+4i)+b(1+2i)+10=0$

よって　$(-3a+b-1)+2(2a+b-1)i=0$

a，b は実数であるから　$-3a+b-1=0,\ 2a+b-1=0$

これを解いて　$a=0,\ b=1$

このとき，方程式は　$x^3+x+10=0$

左辺を因数分解すると　$(x+2)(x^2-2x+5)=0$

これを解いて　$x=-2,\ 1\pm2i$

したがって，他の解は　$x=-2,\ 1-2i$

参考　係数が実数である方程式が虚数解 $a+bi$ をもつと，その共役な複素数 $a-bi$ も，この方程式の解である。本問の場合，$1+2i$ が解であるから，それと共役な複素数 $1-2i$ もこの方程式の解である。

12．3 次方程式 $x^3-(a+3)x^2+9a=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$x=3$ を解にもつことを示せ。

(2)　この方程式が 3 を 2 重解としてもつように，定数 a の値を定めよ。

(3)　この方程式が 3 以外の解を 2 重解としてもつように，定数 a の値を定めよ。

解答　(1)　略　(2)　$a=\frac{3}{2}$　(3)　$a=0,\ -12$

解説

(1)　方程式の左辺に $x=3$ を代入すると

$3^3-(a+3)\cdot3^2+9a=27-9a-27+9a=0$

したがって，方程式は $x=3$ を解にもつ。

(2)　方程式の左辺は$x-3$で割り切れる。割り算をして

因数分解すると　$(x-3)(x^2-ax-3a)=0$

よって　$x-3=0$　または　$x^2-ax-3a=0$　…… ①

題意を満たすための条件は，次の [1]，[2] が成り立つことである。

[1]　2 次方程式 ① が $x=3$ を解にもつ。

[2]　2 次方程式 ① が重解をもたない。

[1] から　$3^2-a\cdot3-3a=0$　整理して　$9-6a=0$　よって　$a=\frac{3}{2}$

また，2 次方程式 ① の判別式は　$D=(-a)^2-4(-3a)=a^2+12a=a(a+12)$

$a=\frac{3}{2}$ のとき，$D\neq0$ であるから，[2] を満たす。

したがって，求める a の値は　$a=\frac{3}{2}$

(3)　題意を満たすための条件は，2 次方程式 ① が 3 以外の重解をもつことである。

$D=0$ から　$a(a+12)=0$　よって　$a=0,\ -12$

① の重解は，$a=0$ のとき$x^2=0$　より　$x=0$，

$a=-12$ のとき$x^2+12x+36=0$　より　$x=-6$

となるから，条件を満たす。

したがって，求める a の値は　$a=0,\ -12$