数学演習（解と係数の関係）H２４．１．２４

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．次の２次方程式の２つの解の和と積を，それぞれ求めよ。

(1)　$x^2+5x+4=0$　　(2)　$2x^2-3x-7=0$　　(3)　$-2x^2+3x=5x-1$

２．２次方程式 $x^2+4x+2=0$ の２つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　　(2)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　　(3)　$(\alpha+1)(\beta+1)$

(4)　$\alpha^2+\beta^2$　　(5)　$(\alpha-\beta)^2$　　(6)　$\alpha^3+\beta^3$

３．次の２数を解とする２次方程式を１つ作れ。

(1)　5，-2　　(2)　$2-\sqrt{3}$，$2+\sqrt{3}$　　(3)　$3-2i$，$3+2i$

４．次の２次方程式の２つの解の間に[　]内の関係があるとき，定数 a の値，および２つの解を求めよ。

(1)　$x^2+ax+27=0$　　[１つの解が他の解の３倍]

(2)　$x^2-(a+1)x+2=0$　[２つの解の差が１]

(3)　$x^2-6x+a=0$　　[１つの解が他の解の平方]

(4)　$x^2+(a+1)x-a=0$　[２つの解の比が２：３]

５．a，b は実数とする。虚数 $3+2i$ が２次方程式 $x^2+ax+b=0$ の１つの解であるとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

６．次の２次式を，複素数の範囲で因数分解せよ。

(1)　x^2-6x+4　　(2)　x^2+5x-1　　(3)　x^2+4　　(4)　$3x^2+4x+2$

7．次のような 2 つの数を求めよ。

(1)　和 2，積 -2　　(2)　和 -3，積 1　　(3)　和 4，積 9

8．2 次方程式 $x^2-p^2x-p=0$ の 2 つの解は $x^2+px-1=0$ の 2 つの解にそれぞれ 1 を加えたものに等しいという。定数 p の値を求めよ。

9．a は定数とする。2 次方程式 $x^2+2(3a-1)x+9a^2-4=0$ が次のような実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

(1)　解がともに正　　(2)　解がともに負

(3)　正と負の解

10．a は定数とする。2 次方程式 $x^2+2ax+2a^2-5=0$ が，1 より大きい異なる 2 つの実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

11．a は定数とする。2 次方程式 $2x^2-4ax+a+3=0$ が次のような実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

(1)　解がともに 1 より大きい

(2)　解がともに 1 より小さい

(3)　1 つの解が 1 より大きく，他の解が 1 より小さい

数学演習（解と係数の関係）Ｈ２４．１．２４　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　）

1． 次の２次方程式の２つの解の和と積を，それぞれ求めよ。

(1)　$x^2+5x+4=0$　　(2)　$2x^2-3x-7=0$　　(3)　$-2x^2+3x=5x-1$

解答　(1)　和 -5，積 4　　(2)　和 $\frac{3}{2}$，積 $-\frac{7}{2}$　　(3)　和 -1，積 $-\frac{1}{2}$

解説

２つの解を α，β とする。

(1)　$\alpha+\beta=-5$，$\alpha\beta=4$

(2)　$\alpha+\beta=\frac{3}{2}$，$\alpha\beta=-\frac{7}{2}$

(3)　方程式を整理すると　$2x^2+2x-1=0$

よって　$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=-\frac{1}{2}$

2． ２次方程式 $x^2+4x+2=0$ の２つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　　(2)　$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$　　(3)　$(\alpha+1)(\beta+1)$

(4)　$\alpha^2+\beta^2$　　(5)　$(\alpha-\beta)^2$　　(6)　$\alpha^3+\beta^3$

解答　(1)　-8　　(2)　-2　　(3)　-1　　(4)　12　　(5)　8　　(6)　-40

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-4$，$\alpha\beta=2$

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=2\cdot(-4)=-8$

(2)　$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-4}{2}=-2$

(3)　$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=2-4+1=-1$

(4)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-4)^2-2\cdot2=12$

(5)　$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=12-2\cdot2=8$

(6)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-4)^3-3\cdot2\cdot(-4)=-40$

3． 次の２数を解とする２次方程式を１つ作れ。

(1)　5，-2　　(2)　$2-\sqrt{3}$，$2+\sqrt{3}$　　(3)　$3-2i$，$3+2i$

解答　(1)　$x^2-3x-10=0$　　(2)　$x^2-4x+1=0$　　(3)　$x^2-6x+13=0$

解説

(1)　２数の和は　$5+(-2)=3$，

２数の積は　$5\cdot(-2)=-10$

したがって　$x^2-3x-10=0$

(2)　２数の和は　$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4$，

２数の積は　$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4-3=1$

したがって　$x^2-4x+1=0$

(3)　２数の和は　$(3-2i)+(3+2i)=6$，

２数の積は　$(3-2i)(3+2i)=9-4i^2=13$

したがって　$x^2-6x+13=0$

4． 次の２次方程式の２つの解の間に［　］内の関係があるとき，定数 a の値，および２つの解を求めよ。

(1)　$x^2+ax+27=0$　　［１つの解が他の解の３倍］

(2)　$x^2-(a+1)x+2=0$　［２つの解の差が１］

(3)　$x^2-6x+a=0$　　［１つの解が他の解の平方］

(4)　$x^2+(a+1)x-a=0$　［２つの解の比が２：３］

解答　(1)　$a=-12$ のとき２つの解 3，9；$a=12$ のとき２つの解 -3，-9

(2)　$a=2$ のとき２つの解 1，2；$a=-4$ のとき２つの解 -1，-2

(3)　$a=8$ のとき２つの解 2，4；$a=-27$ のとき２つの解 -3，9

(4)　$a=-6$ のとき２つの解は 2，3；$a=-\frac{1}{6}$ のとき２つの解 $-\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{2}$

解説

(1)　２つの解は，α，3α と表すことができる。

解と係数の関係から　$\alpha+3\alpha=-a$，$\alpha\cdot3\alpha=27$

すなわち　$4\alpha=-a$，$\alpha^2=9$

$\alpha^2=9$ から　$\alpha=\pm3$

$\alpha=3$　のとき　$a=-4\alpha=-4\cdot3=-12$　　他の解は　$3\alpha=3\cdot3=9$

$\alpha=-3$ のとき　$a=-4\alpha=-4\cdot(-3)=12$　　他の解は　$3\alpha=3\cdot(-3)=-9$

よって，$a=-12$ のとき，２つの解は　3，9

$a=12$　のとき，２つの解は　-3，-9

(2)　２つの解は，α，$\alpha+1$ と表すことができる。

解と係数の関係から　$\alpha+(\alpha+1)=a+1$，$\alpha(\alpha+1)=2$

すなわち　$2\alpha=a$，$\alpha^2+\alpha-2=0$

$\alpha^2+\alpha-2=0$ から　$(\alpha-1)(\alpha+2)=0$　　ゆえに　$\alpha=1$，-2

$\alpha=1$　のとき　$a=2\alpha=2\cdot1=2$　　他の解は　$\alpha+1=1+1=2$

$\alpha=-2$ のとき　$a=2\alpha=2\cdot(-2)=-4$　　他の解は　$\alpha+1=-2+1=-1$

よって，$a=2$　のとき，２つの解は　1，2

$a=-4$ のとき，２つの解は　-1，-2

(3)　２つの解は，α，α^2 と表すことができる。

解と係数の関係から　$\alpha+\alpha^2=6$，$\alpha\cdot\alpha^2=a$

すなわち　$\alpha^2+\alpha-6=0$，$\alpha^3=a$

$\alpha^2+\alpha-6=0$ から　$(\alpha-2)(\alpha+3)=0$　　ゆえに　$\alpha=2$，-3

$\alpha=2$　のとき　$a=2^3=8$　　他の解は　$\alpha^2=2^2=4$

$\alpha=-3$ のとき　$a=(-3)^3=-27$　　他の解は　$\alpha^2=(-3)^2=9$

よって，$a=8$　のとき，２つの解は　2，4

$a=-27$ のとき，２つの解は　-3，9

(4)　２つの解は，2α，3α $(\alpha\neq0)$ と表すことができる。

解と係数の関係から　$2\alpha+3\alpha=-(a+1)$，$2\alpha\cdot3\alpha=-a$

すなわち　$5\alpha+1=-a$，$6\alpha^2=-a$

a を消去すると　$6\alpha^2-5\alpha-1=0$

ゆえに　$(\alpha-1)(6\alpha+1)=0$　　よって　$\alpha=1$，$-\frac{1}{6}$

$\alpha=1$ のとき　$a=-6\alpha^2=-6\cdot1^2=-6$

また，２つの解は　$2\alpha=2\cdot1=2$，$3\alpha=3\cdot1=3$

$\alpha=-\frac{1}{6}$ のとき　$a=-6\alpha^2=-6\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^2=-\frac{1}{6}$

また，２つの解は　$2\alpha=2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{3}$，$3\alpha=3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

したがって　$a=-6$　のとき，２つの解は　2，3

$a=-\frac{1}{6}$ のとき，２つの解は　$-\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{2}$

5． a，b は実数とする。虚数 $3+2i$ が２次方程式 $x^2+ax+b=0$ の１つの解であるとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

解答　$a=-6$，$b=13$，他の解は $x=3-2i$

解説

$x=3+2i$ が解であるから　$(3+2i)^2+a(3+2i)+b=0$

ゆえに　$(9+12i+4i^2)+a(3+2i)+b=0$

整理して　$(3a+b+5)+2(a+6)i=0$

$3a+b+5$，$2(a+6)$ は実数であるから　$3a+b+5=0$，$2(a+6)=0$

これを解いて　$a=-6$，$b=13$

このとき，方程式は　$x^2-6x+13=0$

ゆえに　$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot13}}{1}=3\pm2i$

よって，他の解は　$x=3-2i$

別解　$x=3+2i$ が解であるから，これと共役な複素数 $3-2i$ もこの方程式の解である。

２数 $3+2i$，$3-2i$ の和と積を求めると

$(3+2i)+(3-2i)=6$，$(3+2i)(3-2i)=3^2-4i^2=13$

よって，方程式は　$x^2-6x+13=0$

$x^2+ax+b=0$ と係数を比較して　$a=-6$，$b=13$

6． 次の２次式を，複素数の範囲で因数分解せよ。

(1)　x^2-6x+4　　(2)　x^2+5x-1　　(3)　x^2+4　　(4)　$3x^2+4x+2$

解答　(1)　$(x-3+\sqrt{5})(x-3-\sqrt{5})$　　(2)　$\left(x+\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)$

(3)　$(x+2i)(x-2i)$　　(4)　$3\left(x+\frac{2+\sqrt{2}\,i}{3}\right)\left(x+\frac{2-\sqrt{2}\,i}{3}\right)$

解説

(1)　$x^2-6x+4=0$ の解は　$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot4}}{1}=3\pm\sqrt{5}$

よって　$x^2-6x+4=\{x-(3-\sqrt{5})\}\{x-(3+\sqrt{5})\}$

$=(x-3+\sqrt{5})(x-3-\sqrt{5})$

(2)　$x^2+5x-1=0$ の解は　$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm\sqrt{29}}{2}$

よって　$x^2+5x-1=\left(x-\frac{-5-\sqrt{29}}{2}\right)\left(x-\frac{-5+\sqrt{29}}{2}\right)$

$=\left(x+\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)$

(3)　$x^2+4=0$ の解は　$x=\pm2i$

よって　$x^2+4=\{x-(-2i)\}(x-2i)=(x+2i)(x-2i)$

(4)　$3x^2+4x+2=0$ の解は　$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot2}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{2}\,i}{3}$

よって　$3x^2+4x+2=3\left(x-\frac{-2-\sqrt{2}\,i}{3}\right)\left(x-\frac{-2+\sqrt{2}\,i}{3}\right)$

$=3\left(x+\frac{2+\sqrt{2}\,i}{3}\right)\left(x+\frac{2-\sqrt{2}\,i}{3}\right)$

7． 次のような２つの数を求めよ。

(1)　和 2，積 -2　　(2)　和 -3，積 1　　(3)　和 4，積 9

解答　(1)　$1+\sqrt{3}$，$1-\sqrt{3}$　　(2)　$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$，$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

(3)　$2+\sqrt{5}\,i$，$2-\sqrt{5}\,i$

解説

(1)　求める 2 数は，$x^2-2x-2=0$ の解である。

この方程式を解くと　$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-2)}}{1}=1\pm\sqrt{3}$

よって　$1+\sqrt{3}$，$1-\sqrt{3}$

(2)　求める 2 数は，$x^2+3x+1=0$ の解である。

この方程式を解くと　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

よって　$\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$

(3)　求める 2 数は，$x^2-4x+9=0$ の解である。

この方程式を解くと　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot9}}{1}=2\pm\sqrt{5}\,i$

よって　$2+\sqrt{5}\,i$，$2-\sqrt{5}\,i$

8．2 次方程式 $x^2-p^2x-p=0$ の 2 つの解は $x^2+px-1=0$ の 2 つの解にそれぞれ 1 を加えたものに等しいという。定数 p の値を求めよ。

解答　$p=-2$，1

解説

$x^2+px-1=0$ の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-p$　……①，$\alpha\beta=-1$　……②

$x^2-p^2x-p=0$ の解は，$\alpha+1$，$\beta+1$ と表されるから，解と係数の関係により

$(\alpha+1)+(\beta+1)=p^2$

$(\alpha+1)(\beta+1)=-p$

よって　$\alpha+\beta+2=p^2$　……③

$\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=-p$　……④

③に①を代入して整理すると　$p^2+p-2=0$

これを解いて　$p=-2$，1

また，④の左辺に①，②を代入すると，$-p=-p$ となり，p についての恒等式となる。

したがって，求める p の値は　$p=-2$，1

9．a は定数とする。2 次方程式 $x^2+2(3a-1)x+9a^2-4=0$ が次のような実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

(1)　解がともに正　　(2)　解がともに負

(3)　正と負の解

解答　(1)　$a<-\dfrac{2}{3}$　(2)　$\dfrac{2}{3}<a\leqq\dfrac{5}{6}$　(3)　$-\dfrac{2}{3}<a<\dfrac{2}{3}$

解説

2 つの解を α，β とし，判別式を D とする。

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-2(3a-1)$，$\alpha\beta=9a^2-4=(3a+2)(3a-2)$

また　$\dfrac{D}{4}=(3a-1)^2-(9a^2-4)=-6a+5$

(1)　方程式の解がともに正であるための条件は　$D\geqq0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$

$D\geqq0$ から　$-6a+5\geqq0$　よって　$a\leqq\dfrac{5}{6}$　……①

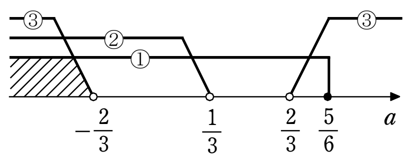
$\alpha+\beta>0$ から　$-2(3a-1)>0$　よって　$a<\dfrac{1}{3}$　……②

$\alpha\beta>0$ から　$(3a+2)(3a-2)>0$

よって　$a<-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{3}<a$　……③

①，②，③の共通範囲を求めて

$a<-\dfrac{2}{3}$



(2)　方程式の解がともに負であるための条件は　$D\geqq0$，$\alpha+\beta<0$，$\alpha\beta>0$

$D\geqq0$ から　$-6a+5\geqq0$　よって　$a\leqq\dfrac{5}{6}$　……①

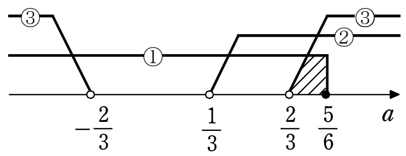
$\alpha+\beta<0$ から　$-2(3a-1)<0$　よって　$a>\dfrac{1}{3}$　……②

$\alpha\beta>0$ から　$(3a+2)(3a-2)>0$

よって　$a<-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{3}<a$　……③

①，②，③の共通範囲を求めて

$\dfrac{2}{3}<a\leqq\dfrac{5}{6}$



(3)　方程式が正と負の解をもつための条件は　$\alpha\beta<0$

ゆえに　$(3a+2)(3a-2)<0$　よって　$-\dfrac{2}{3}<a<\dfrac{2}{3}$

10．a は定数とする。2 次方程式 $x^2+2ax+2a^2-5=0$ が，1 より大きい異なる 2 つの実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

解答　$-\sqrt{5}<a<-2$

解説

2 つの解を α，β とし，判別式を D とする。

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-2a$，$\alpha\beta=2a^2-5$

また　$\dfrac{D}{4}=a^2-(2a^2-5)=-(a^2-5)=-(a+\sqrt{5})(a-\sqrt{5})$

方程式の解が $\alpha\neq\beta$，$\alpha>1$，$\beta>1$ であるための条件は

$D>0$，$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$，$(\alpha-1)(\beta-1)>0$

すなわち　$D>0$，$\alpha+\beta-2>0$，$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$

$D>0$ から　$-(a+\sqrt{5})(a-\sqrt{5})>0$　よって　$-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$　……①

$\alpha+\beta-2>0$ から　$-2a-2>0$　よって　$a<-1$　……②

$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$ から　$(2a^2-5)+2a+1>0$

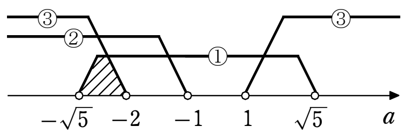
整理して　$a^2+a-2>0$

ゆえに　$(a+2)(a-1)>0$

よって　$a<-2$，$1<a$　……③

①，②，③の共通範囲を求めて

$-\sqrt{5}<a<-2$



11．a は定数とする。2 次方程式 $2x^2-4ax+a+3=0$ が次のような実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

(1)　解がともに 1 より大きい

(2)　解がともに 1 より小さい

(3)　1 つの解が 1 より大きく，他の解が 1 より小さい

解答　(1)　$\dfrac{3}{2}\leqq a<\dfrac{5}{3}$　(2)　$a\leqq-1$　(3)　$a>\dfrac{5}{3}$

解説

2 つの解を α，β とし，判別式を D とする。

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=\dfrac{a+3}{2}$

また　$\dfrac{D}{4}=(-2a)^2-2(a+3)=2(2a^2-a-3)=2(a+1)(2a-3)$

(1)　方程式の解がともに 1 より大きい条件は

$D\geqq0$，$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$，$(\alpha-1)(\beta-1)>0$

すなわち　$D\geqq0$，$\alpha+\beta-2>0$，$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$

$D\geqq0$ から　$2(a+1)(2a-3)\geqq0$　よって　$a\leqq-1$，$\dfrac{3}{2}\leqq a$　……①

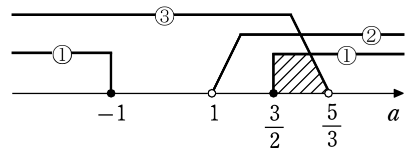
$\alpha+\beta-2>0$ から　$2a-2>0$　よって　$a>1$　……②

$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$ から　$\dfrac{a+3}{2}-2a+1>0$

よって　$a<\dfrac{5}{3}$　……③

①，②，③の共通範囲を求めて

$\dfrac{3}{2}\leqq a<\dfrac{5}{3}$



(2)　方程式の解がともに 1 より小さい条件は

$D\geqq0$，$(\alpha-1)+(\beta-1)<0$，$(\alpha-1)(\beta-1)>0$

すなわち　$D\geqq0$，$\alpha+\beta-2<0$，$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$

$D\geqq0$ から　$2(a+1)(2a-3)\geqq0$　よって　$a\leqq-1$，$\dfrac{3}{2}\leqq a$　……①

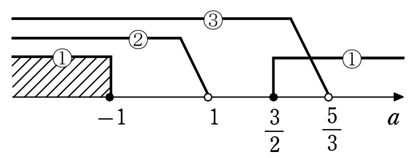
$\alpha+\beta-2<0$ から　$2a-2<0$　よって　$a<1$　……②

$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$ から　$\dfrac{a+3}{2}-2a+1>0$

よって　$a<\dfrac{5}{3}$　……③

①，②，③の共通範囲を求めて

$a\leqq-1$



(3)　1 つの解が 1 より大きく，他の解が 1 より小さい条件は

$(\alpha-1)(\beta-1)<0$　すなわち　$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1<0$

ゆえに　$\dfrac{a+3}{2}-2a+1<0$　よって　$a>\dfrac{5}{3}$