数学演習（高次方程式）Ｈ２１．１．１９　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．$\dfrac{1+xi}{3+i}$ が純虚数になる実数 x の値を求めよ。

２．2 次方程式 $x^2-3x+4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　　(2)　$\alpha^2+\beta^2$

(3)　$\alpha^3+\beta^3$　　(4)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

３．次の方程式を解け。　$x^3-7x^2+6=0$

４．3 次方程式 $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4=0$ が虚数解をもつように，定数 a の値の範囲を求めよ。

５．整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると余りは 5，$x-2$ で割ると余りは 7 となる。このとき，$P(x)$ を x^2-3x+2 で割った余りを求めよ。

６．3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ の 1 つの解が $x=2+i$ であるとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

7．方程式 $x^3=1$ の虚数解の 1 つを ω とする。このとき

$\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+1=$ ${}^{ア}\boxed{}$，$\omega^{100}+\omega^{50}=$ ${}^{イ}\boxed{}$，$(\omega+2\omega^2)^2+(2\omega+\omega^2)^2=$ ${}^{ウ}\boxed{}$

8．3 次方程式 $x^3+x^2+x+3=0$ の 3 つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ の値を求めよ。

9．3 次方程式 $x^3+(a-2)x^2-4a=0$ が 2 重解をもつように，定数 a の値を定めよ。

10．2 次方程式 $x^2-mx+3m=0$ が整数解のみをもつような定数 m の値とそのときの整数の解をすべて求めよ。

数学演習（高次方程式）Ｈ２１．１．１９［解答］　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

1．$\dfrac{1+xi}{3+i}$ が純虚数になる実数 x の値を求めよ。[４点]

解答　$x=-3$

解説

$$\frac{1+xi}{3+i}=\frac{(1+xi)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{3+(3x-1)i-xi^2}{9-i^2}$$

$$=\frac{x+3}{10}+\frac{3x-1}{10}i \quad \cdots\cdots ①$$

x は実数であるから，$\dfrac{x+3}{10}$，$\dfrac{3x-1}{10}$ も実数である。

① が純虚数となるための条件は

$x+3=0$　かつ　$3x-1\neq 0$

$x+3=0$ から　$x=-3$　これは $3x-1\neq 0$ を満たす。

別解　$\dfrac{1+xi}{3+i}=bi$（b は実数，ただし $b\neq 0$）とすると

$1+xi=bi(3+i)$

整理して　$1+xi=-b+3bi$

x，b は実数であるから　$1=-b$，$x=3b$

ゆえに　$b=-1$，$x=-3$　これは $b\neq 0$ を満たす。

2．2 次方程式 $x^2-3x+4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。[各４点]

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　　(2)　$\alpha^2+\beta^2$

(3)　$\alpha^3+\beta^3$　　(4)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

解答　(1)　12　(2)　1　(3)　-9　(4)　$\dfrac{1}{4}$

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-\dfrac{-3}{1}=3$，$\alpha\beta=\dfrac{4}{1}=4$

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=4\cdot 3=12$

(2)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot 4=1$

(3)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3^3-3\cdot 4\cdot 3=-9$

別解　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=3(1-4)=-9$

(4)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{4}$

3．次の方程式を解け。　$x^3-7x^2+6=0$　[１０点]

解答　$x=1$，$3\pm\sqrt{15}$

解説

$P(x)=x^3-7x^2+6$ とすると　$P(1)=1^3-7\cdot 1^2+6=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつから

$P(x)=(x-1)(x^2-6x-6)$

$P(x)=0$ から　$x-1=0$　または　$x^2-6x-6=0$

ゆえに　$x=1$，$3\pm\sqrt{15}$

4．3 次方程式 $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4=0$ が虚数解をもつように，定数 a の値の範囲を求めよ。[１０点]

解答　$-4<a<4$

解説

$f(x)=x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4$ とすると

$f(1)=1^3+(a-1)\cdot 1^2+(4-a)\cdot 1-4=0$

よって，$f(x)$ は $x-1$ を因数にもつから

$f(x)=(x-1)(x^2+ax+4)$

ゆえに，方程式は　$(x-1)(x^2+ax+4)=0$

したがって　$x-1=0$　または　$x^2+ax+4=0$

よって，この 3 次方程式は $x=1$ という実数解を持つので，

虚数解をもつ条件は，2 次方程式 $x^2+ax+4=0$ の判別式を

D としたとき，$D<0$ が成り立つことである。

$D=a^2-4\cdot 4=(a-4)(a+4)<0$

これを解いて，$-4<a<4$

5．整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると余りは 5，$x-2$ で割ると余りは 7 となる。このとき，$P(x)$ を x^2-3x+2 で割った余りを求めよ。[１０点]

解答　$2x+3$

解説

$P(x)$ を x^2-3x+2 すなわち $(x-1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

条件から　$P(1)=5$，　$P(2)=7$

よって　$a+b=5$，　$2a+b=7$

ゆえに　$a=2$，$b=3$　　求める余りは　$2x+3$

6．3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ の 1 つの解が $x=2+i$ であるとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。[１０点]

解答　$a=-2$，$b=-3$，他の解は $x=-2$，$2-i$

解説

$x=2+i$ がこの方程式の解であるから

$(2+i)^3+a(2+i)^2+b(2+i)+10=0$

ここで，$(2+i)^3=2^3+3\cdot 2^2i+3\cdot 2i^2+i^3=2+11i$，

$(2+i)^2=2^2+2\cdot 2i+i^2=3+4i$　であるから

$2+11i+a(3+4i)+b(2+i)+10=0$

i について整理すると　$3a+2b+12+(4a+b+11)i=0$

$3a+2b+12$，$4a+b+11$ は実数であるから　$3a+2b+12=0$，$4a+b+11=0$

これを解いて　$a=-2$，$b=-3$

ゆえに，方程式は　$x^3-2x^2-3x+10=0$

$f(x)=x^3-2x^2-3x+10$ とすると

$f(-2)=(-2)^3-2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+10=0$

よって，$f(x)$ は $x+2$ を因数にもつから

$f(x)=(x+2)(x^2-4x+5)$

したがって，方程式は　$(x+2)(x^2-4x+5)=0$

ゆえに　$x+2=0$　または　$x^2-4x+5=0$

$x^2-4x+5=0$ を解くと　$x=2\pm i$

よって，他の解は　$x=-2$，$2-i$

別解 1　実数を係数とする 3 次方程式が虚数解 $2+i$ をもつから，共役な複素数 $2-i$ もこの方程式の解である。

$(2+i)+(2-i)=4$，　$(2+i)(2-i)=5$

ゆえに，$2+i$，$2-i$ を解とする 2 次方程式は　$x^2-4x+5=0$

よって，$x^3+ax^2+bx+10$ は x^2-4x+5 で割り切れる。

右の割り算における余り

$(4a+b+11)x-5a-10$

が 0 に等しいから

$$\begin{cases}4a+b+11=0\\-5a-10=0\end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x+(a+4) \\ \hline
x^2-4x+5 & x^3+ax^2+bx+10 \\
 & x^3-4x^2+5x \\ \hline
 & (a+4)x^2+(b-5)x+10 \\
 & (a+4)x^2-4(a+4)x+5(a+4) \\ \hline
 & (4a+b+11)x-5a-10
\end{array}$$

これを解いて　$a=-2$，$b=-3$

このとき，方程式は

$(x^2-4x+5)(x+2)=0$

よって　$x^2-4x+5=0$　または　$x+2=0$

ゆえに　$x=2\pm i$，-2

したがって，他の解は　$x=2-i$，-2

別解 2　実数を係数とする 3 次方程式が虚数解 $2+i$ をもつから，共役な複素数 $2-i$ もこの方程式の解である。

残りの解を k とおくと，3 次方程式の解と係数の関係から

$(2+i)+(2-i)+k=-a$　$\cdots\cdots$ ①

$(2+i)(2-i)+(2-i)k+k(2+i)=b$　$\cdots\cdots$ ②

$(2+i)(2-i)k=-10$　$\cdots\cdots$ ③

③ から　$5k=-10$　ゆえに　$k=-2$

よって，他の解は　$x=2-i$，-2

① から　$a=-(4+k)=-2$

② から　$b=5+4k=-3$

7．方程式 $x^3=1$ の虚数解の1つを ω とする。このとき　　　　[各5点]

$\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+1=$ ${}^{ア}\boxed{}$，$\omega^{100}+\omega^{50}=$ ${}^{イ}\boxed{}$，$(\omega+2\omega^2)^2+(2\omega+\omega^2)^2=$ ${}^{ウ}\boxed{}$

解答　(ア) 0　(イ) -1　(ウ) 3

解説

$x^3=1$ から　$x^3-1=0$　ゆえに　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω は方程式 $x^2+x+1=0$ の解であるから　$\omega^2+\omega+1=0$

また，ω は方程式 $x^3=1$ の解であるから　$\omega^3=1$

よって　$\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+1=\dfrac{\omega+1+\omega^2}{\omega^2}={}^{ア}0$

また　$\omega^{100}+\omega^{50}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega+(\omega^3)^{16}\cdot\omega^2=1^{33}\cdot\omega+1^{16}\cdot\omega^2=\omega+\omega^2$

$\omega^2+\omega+1=0$ であるから　$\omega^2+\omega=-1$

ゆえに　$\omega^{100}+\omega^{50}={}^{イ}-1$

更に，$\omega^2+\omega+1=0$ から　$\omega^2=-\omega-1$

よって　$(\omega+2\omega^2)^2+(2\omega+\omega^2)^2=\{\omega+2(-\omega-1)\}^2+(2\omega-\omega-1)^2$

$=(-\omega-2)^2+(\omega-1)^2$

$=2\omega^2+2\omega+5=2(\omega^2+\omega)+5$

$=2\cdot(-1)+5={}^{ウ}3$

8．3次方程式 $x^3+x^2+x+3=0$ の3つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ の値を求めよ。[5点]

解答　-1

解説

解と係数の関係から

$\alpha+\beta+\gamma=-1$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$，$\alpha\beta\gamma=-3$

よって　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-1)^2-2\cdot1=-1$

9．3次方程式 $x^3+(a-2)x^2-4a=0$ が2重解をもつように，定数 a の値を定めよ。[10点]

解答　$a=-1$，0，8

解説

与えられた3次方程式の左辺を a について整理すると

$(x^2-4)a+x^3-2x^2=0$

$(x+2)(x-2)a+x^2(x-2)=0$

$(x-2)\{x^2+(x+2)a\}=0$

$(x-2)(x^2+ax+2a)=0$

よって　$x-2=0$　または　$x^2+ax+2a=0$

この3次方程式が2重解をもつのは，次の[1]または[2]の場合である。

[1]　$x^2+ax+2a=0$ が $x\neq2$ の重解をもつ。

判別式を D とすると　$D=0$　かつ　$-\dfrac{a}{2\cdot1}\neq2$

$D=a^2-4\cdot1\cdot2a=a(a-8)$

$D=0$ とすると　$a=0$，8

これは $a\neq-4$ を満たす。

[2]　$x^2+ax+2a=0$ の解の1つが2で，他の解が2でない。

2が解であるための条件は　$2^2+a\cdot2+2a=0$

これを解いて　$a=-1$

このとき，方程式は　$(x-2)(x^2-x-2)=0$

したがって　$(x-2)^2(x+1)=0$

ゆえに，$x=2$ は2重解である。

以上から　$a=-1$，0，8

10．2次方程式 $x^2-mx+3m=0$ が整数解のみをもつような定数 m の値とそのときの整数の解をすべて求めよ。[10点]

解答　$m=-4$ のとき　-6，2；$m=0$ のとき　0；$m=12$ のとき　6；
$m=16$ のとき　4，12

解説

2次方程式 $x^2-mx+3m=0$ が2つの整数解 α，β $(\alpha\leqq\beta)$ をもつとすると，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=m$，$\alpha\beta=3m$　…… ①

① から m を消去すると　$\alpha\beta=3(\alpha+\beta)$

ゆえに　$\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9=9$　よって　$(\alpha-3)(\beta-3)=9$

α，β を整数とするとき，$\alpha-3$，$\beta-3$ も整数であり，$\alpha\leqq\beta$ より $\alpha-3\leqq\beta-3$ であるから，$\alpha-3$，$\beta-3$ の値の組は

$(\alpha-3,\ \beta-3)=(-9,\ -1),\ (-3,\ -3),\ (1,\ 9),\ (3,\ 3)$

ゆえに　$(\alpha,\ \beta)=(-6,\ 2),\ (0,\ 0),\ (4,\ 12),\ (6,\ 6)$

このとき，m の値は，① から　$m=-4$，0，16，12

したがって，求める整数解は

$m=-4$ のとき　-6，2

$m=0$　のとき　0

$m=12$　のとき　6

$m=16$　のとき　4，12