数学演習（複素数と方程式）Ｈ２１．７．２　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{3+2i}{2+i}-\dfrac{i}{1-2i}$　　(2) $(4+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})$

２．次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。　$(2+i)x+(3-2i)y=-9+20i$

３．m が整数とする。2 次方程式 $x^2+(5-m)x-2m+7=0$ が虚数解をもつような定数 m の値を求めよ。

４．2 次方程式 $x^2-3x+4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^3+\beta^3$　　(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$　　(3) $\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}$

５．2 次方程式 $x^2-12x+k=0$ において，1 つの解が他の解の 2 乗となるとき，定数 k の値と方程式の解を求めよ。

６．2 次方程式 $2x^2-x+3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，2 数 α^2，β^2 を解とする 2 次方程式で係数が整数をなるものを 1 つ作れ。

７．x^3+ax^2-5x+b が $x+2$ で割り切れ，$x+1$ で割ると 8 余るように，定数 a，b の値を定めよ。

８．多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると 3 余り，$2x+1$ で割ると 4 余る。$P(x)$ を $(x-1)(2x+1)$ で割ったときの余りを求めよ。

9．1の３乗根のうち，虚数であるものの１つを ω とする。このとき

$\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+1=$ ア $\boxed{}$， $\omega^{100}+\omega^{50}=$ イ $\boxed{}$ である。

10. 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ の 1 つの解が $x=2+i$ であるとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

11. 次の方程式を解け。

(1) $x^4-5x^2-6=0$

(2) $(x^2-x)^2+(x^2-x)-6=0$

(3) $x^3-3x^2-x+3=0$

12. 3 次方程式 $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4=0$ が 2 重解をもつように，定数 a の値を定めよ。

1．次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{3+2i}{2+i}-\dfrac{i}{1-2i}$　　(2) $(4+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})$

解答　(1) 2　(2) $17-\sqrt{5}\,i$

解説

(1) $\dfrac{3+2i}{2+i}-\dfrac{i}{1-2i}=\dfrac{(3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}-\dfrac{i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$=\dfrac{6+i-2i^2}{2^2-i^2}-\dfrac{i+2i^2}{1^2-(2i)^2}$

$=\dfrac{8+i}{5}-\dfrac{-2+i}{5}=\dfrac{10}{5}=2$

(2) $(4+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})=(4+\sqrt{5}\,i)(3-\sqrt{5}\,i)$

$=12-\sqrt{5}\,i-5i^2=17-\sqrt{5}\,i$

2．次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。　$(2+i)x+(3-2i)y=-9+20i$

解答　$x=6$，$y=-7$

解説

与えられた等式を変形すると

$(2x+3y)+(x-2y)i=-9+20i$

x，y が実数であるから，$2x+3y$，$x-2y$ も実数である。

よって　$2x+3y=-9$，　$x-2y=20$

これを解いて　$x=6$，$y=-7$

3．m が整数とする。2 次方程式 $x^2+(5-m)x-2m+7=0$ が虚数解をもつような定数 m の値を求めよ。

解答　$m=0$，1，2

解説

判別式を D とすると　$D=(5-m)^2-4(-2m+7)=m^2-2m-3$

$=(m+1)(m-3)$

虚数解をもつための条件は　$D<0$

すなわち　$(m+1)(m-3)<0$　　ゆえに　$-1<m<3$

m は整数であるから　$m=0$，1，2

4．2 次方程式 $x^2-3x+4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^3+\beta^3$　　(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$　　(3) $\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}$

解答　(1) -9　(2) $\dfrac{1}{4}$　(3) -1

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-\dfrac{-3}{1}=3$，$\alpha\beta=\dfrac{4}{1}=4$

(1) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3^3-3\cdot4\cdot3=-9$

別解　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=3(1-4)=-9$

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{3^2-2\cdot4}{4}=\dfrac{1}{4}$

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}=\dfrac{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$

$=\dfrac{1-3}{4-3+1}=-1$

5．2 次方程式 $x^2-12x+k=0$ において，1 つの解が他の解の 2 乗となるとき，定数 k の値と方程式の解を求めよ。

解答　$k=27$ のとき 3，9；$k=-64$ のとき -4，16

解説

1 つの解が他の解の 2 乗であるから，2 つの解は α，α^2 と表すことができる。

解と係数の関係から

$\alpha+\alpha^2=12$ ……①，　$\alpha\cdot\alpha^2=k$ ……②

① から　$\alpha^2+\alpha-12=0$　　よって　$(\alpha+4)(\alpha-3)=0$

ゆえに　$\alpha=-4$，3

$\alpha=-4$ のとき，② から　$k=-64$

$\alpha=3$　のとき，② から　$k=27$

また，方程式の解は

$k=27$　のとき　$\alpha=3$，$\alpha^2=9$

$k=-64$ のとき　$\alpha=-4$，$\alpha^2=16$

6．2 次方程式 $2x^2-x+3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，2 数 α^2，β^2 を解とする 2 次方程式で係数が整数をなるものを 1 つ作れ。

解答　$4x^2+11x+9=0$

解説

解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-\dfrac{-1}{2}=\dfrac{1}{2}$，　$\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

よって　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{3}{2}=-\dfrac{11}{4}$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$

ゆえに，α^2，β^2 を解とする 2 次方程式の 1 つは

$x^2-\left(-\dfrac{11}{4}\right)x+\dfrac{9}{4}=0$　すなわち　$x^2+\dfrac{11}{4}x+\dfrac{9}{4}=0$

両辺に 4 を掛けて　$4x^2+11x+9=0$

7．x^3+ax^2-5x+b が $x+2$ で割り切れ，$x+1$ で割ると 8 余るように，定数 a，b の値を定めよ。

解答　$a=-2$，$b=6$

解説

$P(x)=x^3+ax^2-5x+b$ とする。

$P(x)$ が $x+2$ で割り切れるための条件は　$P(-2)=0$

すなわち　$(-2)^3+a(-2)^2-5\cdot(-2)+b=0$

整理すると　$4a+b=-2$ ……①

$P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りが 8 となるための条件は

$P(-1)=8$　すなわち　$(-1)^3+a(-1)^2-5\cdot(-1)+b=8$

整理すると　$a+b=4$ ……②

①，② を解いて　$a=-2$，$b=6$

8．多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると 3 余り，$2x+1$ で割ると 4 余る。$P(x)$ を $(x-1)(2x+1)$ で割ったときの余りを求めよ。

解答　$-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{11}{3}$

解説

$P(x)$ を 2 次式 $(x-1)(2x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x-1)(2x+1)Q(x)+ax+b$ ……①

$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが 3 であるから　$P(1)=3$

① の両辺に $x=1$ を代入すると　$P(1)=a+b$

よって　$a+b=3$ ……②

また，$P(x)$ を $2x+1$ で割ったときの余りは 4 であるから　$P\left(-\dfrac{1}{2}\right)=4$

① の両辺に $x=-\dfrac{1}{2}$ を代入すると　$P\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{a}{2}+b$

よって　$-\dfrac{a}{2}+b=4$ ……③

②，③ を解くと　　$a=-\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{11}{3}$

したがって，求める余りは　　$-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{11}{3}$

9．1の３乗根のうち，虚数であるものの１つを ω とする。このとき $\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+1=$ ア $\boxed{}$，$\omega^{100}+\omega^{50}=$ イ $\boxed{}$ である。

解答　(ア)　0　　(イ)　-1

解説

1の３乗根とは，方程式 $x^3=1$ の解である。

$x^3=1$ から　　$x^3-1=0$

よって　　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω は方程式 $x^2+x+1=0$ の解であるから　　$\omega^2+\omega+1=0$

また，ω は方程式 $x^3=1$ の解であるから　　$\omega^3=1$

ゆえに　　$\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+1=\dfrac{\omega+1+\omega^2}{\omega^2}=\dfrac{0}{\omega^2}=$ ア 0

また　　$\omega^{100}+\omega^{50}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega+(\omega^3)^{16}\cdot\omega^2=1^{33}\cdot\omega+1^{16}\cdot\omega^2$

$\qquad=\omega+\omega^2$

$\omega^2+\omega+1=0$ であるから　　$\omega+\omega^2=-1$

よって　　$\omega^{100}+\omega^{50}=$ イ -1

10．3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ の 1 つの解が $x=2+i$ であるとき，実数の定数 a，b の値と他の解を求めよ。

解答　$a=-2$，$b=-3$，他の解は $x=-2$，$2-i$

解説

$x=2+i$ がこの方程式の解であるから

$$(2+i)^3+a(2+i)^2+b(2+i)+10=0$$

ここで，$(2+i)^3=2^3+3\cdot2^2i+3\cdot2i^2+i^3=2+11i$,

$(2+i)^2=2^2+2\cdot2i+i^2=3+4i$　　　であるから

$$2+11i+a(3+4i)+b(2+i)+10=0$$

i について整理すると　　$3a+2b+12+(4a+b+11)i=0$

$3a+2b+12$，$4a+b+11$ は実数であるから　　$3a+2b+12=0$，$4a+b+11=0$

これを解いて　　$a=-2$，$b=-3$

ゆえに，方程式は　　$x^3-2x^2-3x+10=0$

$f(x)=x^3-2x^2-3x+10$ とすると

$$f(-2)=(-2)^3-2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+10=0$$

よって，$f(x)$ は $x+2$ を因数にもつから

$$f(x)=(x+2)(x^2-4x+5)$$

したがって，方程式は　　$(x+2)(x^2-4x+5)=0$

ゆえに　　$x+2=0$　または　$x^2-4x+5=0$

$x^2-4x+5=0$ を解くと　　$x=2\pm i$

よって，他の解は　　$x=-2$，$2-i$

別解 1　実数を係数とする 3 次方程式が虚数解 $2+i$ をもつから，共役な複素数 $2-i$ もこの方程式の解である。

$$(2+i)+(2-i)=4,\quad (2+i)(2-i)=5$$

ゆえに，$2+i$，$2-i$ を解とする 2 次方程式は　　$x^2-4x+5=0$

よって，$x^3+ax^2+bx+10$ は x^2-4x+5 で割り切れる。

右の割り算における余り

$$(4a+b+11)x-5a-10$$

が 0 に等しいから

$$\begin{array}{rl} & x+(a+4) \\ \hline x^2-4x+5 \big) & x^3+ax^2+bx+10 \\ & x^3-4x^2+5x \\ \hline & (a+4)x^2+(b-5)x+10 \\ & (a+4)x^2-4(a+4)x+5(a+4) \\ \hline & (4a+b+11)x-5a-10 \end{array}$$

$$\begin{cases} 4a+b+11=0 \\ -5a-10=0 \end{cases}$$

これを解いて　　$a=-2$，$b=-3$

このとき，方程式は

$$(x^2-4x+5)(x+2)=0$$

よって　　$x^2-4x+5=0$　または　$x+2=0$

ゆえに　　$x=2\pm i$，-2

したがって，他の解は　　$x=2-i$，-2

別解 2　実数を係数とする 3 次方程式が虚数解 $2+i$ をもつから，共役な複素数 $2-i$ もこの方程式の解である。

残りの解を k とおくと，3 次方程式の解と係数の関係から

$(2+i)+(2-i)+k=-a$　……①

$(2+i)(2-i)+(2-i)k+k(2+i)=b$　……②

$(2+i)(2-i)k=-10$　……③

③ から　　$5k=-10$　　　ゆえに　　$k=-2$

よって，他の解は　　$x=2-i$，-2

① から　　$a=-(4+k)=-2$

② から　　$b=5+4k=-3$

＜この３つの解法はすべて出来るようにしておきなさい！！＞

11．次の方程式を解け。

(1)　$x^4-5x^2-6=0$　　　(2)　$(x^2-x)^2+(x^2-x)-6=0$

(3)　$x^3-3x^2-x+3=0$

解答　(1)　$x=\pm i$，$\pm\sqrt{6}$　　(2)　$x=-1$，2，$\dfrac{1\pm\sqrt{11}\,i}{2}$　　(3)　$x=-1$，1，3

解説

(1)　$x^4-5x^2-6=0$ から　　$(x^2+1)(x^2-6)=0$

よって　　$x^2+1=0$　または　$x^2-6=0$

ゆえに　　$x^2=-1$　または　$x^2=6$

したがって　　$x=\pm i$，$\pm\sqrt{6}$

(2)　$(x^2-x)^2+(x^2-x)-6=0$ から　　$(x^2-x-2)(x^2-x+3)=0$

よって　　$(x+1)(x-2)(x^2-x+3)=0$

ゆえに　　$x+1=0$　または　$x-2=0$　または　$x^2-x+3=0$

したがって　　$x=-1$，2，$\dfrac{1\pm\sqrt{11}\,i}{2}$

(3)　$x^3-3x^2-x+3=0$ から　　$x^2(x-3)-(x-3)=0$

よって　　$(x^2-1)(x-3)=0$

ゆえに　　$(x+1)(x-1)(x-3)=0$

すなわち　　$x+1=0$　または　$x-1=0$　または　$x-3=0$

したがって　　$x=-1$，1，3

12．3 次方程式 $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4=0$ が 2 重解をもつように，定数 a の値を定めよ。

解答　$a=\pm4$，-5

解説

$f(x)=x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4$ とすると

$$f(1)=1^3+(a-1)\cdot1^2+(4-a)\cdot1-4=0$$

よって，$f(x)$ は $x-1$ を因数にもつから

$$f(x)=(x-1)(x^2+ax+4)$$

ゆえに，方程式は　　$(x-1)(x^2+ax+4)=0$

したがって　　$x-1=0$　または　$x^2+ax+4=0$

この 3 次方程式が 2 重解をもつ条件は，次の [1] または [2] が成り立つことである。

[1]　$x^2+ax+4=0$ が 1 でない重解をもつ。

判別式を D とすると　　$D=0$　かつ　$1^2+a\cdot1+4\neq0$

$$D=a^2-16=(a+4)(a-4)$$

$D=0$ とすると　　$a=\pm4$　　　これは $a+5\neq0$ を満たす。

[2]　$x^2+ax+4=0$ の 1 つの解が 1，他の解が 1 でない。

$x=1$ が解であるから　　$1^2+a\cdot1+4=0$

よって　　$a+5=0$　　　ゆえに　　$a=-5$

このとき　　$x^2-5x+4=0$　　　よって　　$(x-1)(x-4)=0$

これを解いて　　$x=1$，4

したがって，他の解が 1 でないから適する。

[1]，[2] から，求める定数 a の値は　　$a=\pm4$，-5