数学演習（等式の証明･不等式の証明）Ｈ２４．１．１３

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．(1)　等式 $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$ を証明せよ。

(2)　$a+b+1=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$a(a^2-1)-b(b^2-1)=a(a+1)(b^2-a^2)$$

2．$a:b:c=2:3:4$ のとき　$\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ の値を求めよ。

3．次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$x^2+y^2\geqq 2(x+y-1)$　　(2)　$x^2+2xy+5y^2-4x-8y+5\geqq 0$

(3)　$3(x^2+y^2+z^2)\geqq(x+y+z)^2$

4．$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。　$2\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{4a+b}$

5．不等式 $|a-b| \leqq |a|+|b|$ を証明せよ。

6．$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

(1)　$\dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{a} \geqq 2$　　(2)　$\dfrac{b}{3a}+\dfrac{12a}{b} \geqq 4$　　(3)　$\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{b}\right) \geqq 4$

数学演習（等式の証明･不等式の証明）Ｈ２４．１．１３　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．(1)　等式 $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$ を証明せよ。

(2)　$a+b+1=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$a(a^2-1)-b(b^2-1)=a(a+1)(b^2-a^2)$$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$(左辺)=a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2$

$(右辺)=(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)-(a^2d^2+2abcd+b^2c^2)$

$=a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2$

よって，等式は成り立つ。

(2)　$a+b+1=0$ から　　$b=-(a+1)$

$(左辺)=a(a+1)(a-1)-\{-(a+1)\}\{(a+1)^2-1\}$

$=(a+1)\{a(a-1)+(a+1)^2-1\}$

$=(a+1)(a^2-a+a^2+2a+1-1)$

$=(a+1)(2a^2+a)=a(a+1)(2a+1)$

$(右辺)=a(a+1)\{(a+1)^2-a^2\}=a(a+1)(a^2+2a+1-a^2)$

$=a(a+1)(2a+1)$

よって，等式は成り立つ。

別解　$a+b+1=0$ から　　$a+1=-b$，$b+1=-a$，$a+b=-1$

$(左辺)-(右辺)=a(a+1)(a-1)-b(b+1)(b-1)-a(a+1)(b+a)(b-a)$

$=a(-b)(a-1)-b(-a)(b-1)-a(-b)(-1)(b-a)$

$=-ab(a-1)+ab(b-1)-ab(b-a)$

$=-ab(a-1-b+1+b-a)=0$

よって，等式は成り立つ。

２．$a:b:c=2:3:4$ のとき　$\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ の値を求めよ。

解答　$\dfrac{26}{29}$

解説

$a:b:c=2:3:4$ から　　$\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{4}$

$\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{4}=k$ とおくと　　$a=2k$，$b=3k$，$c=4k$

よって　　$\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{2k\cdot3k+3k\cdot4k+4k\cdot2k}{(2k)^2+(3k)^2+(4k)^2}=\dfrac{26k^2}{29k^2}=\dfrac{26}{29}$

３．次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$x^2+y^2\geqq2(x+y-1)$　　(2)　$x^2+2xy+5y^2-4x-8y+5\geqq0$

(3)　$3(x^2+y^2+z^2)\geqq(x+y+z)^2$

解答　(1)　証明略，等号が成り立つのは $x=y=1$ のとき

(2)　証明略，等号が成り立つのは $x=\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ のとき

(3)　証明略，等号が成り立つのは $x=y=z$ のとき

解説

(1)　$(x^2+y^2)-2(x+y-1)=(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)=(x-1)^2+(y-1)^2\geqq0$

よって　　$x^2+y^2\geqq2(x+y-1)$

等号が成り立つのは，$x-1=0$ かつ $y-1=0$，すなわち $x=y=1$ のときである。

(2)　$x^2+2xy+5y^2-4x-8y+5=x^2+2(y-2)x+5y^2-8y+5$

$=\{x^2+2(y-2)x+(y-2)^2\}-(y-2)^2+5y^2-8y+5$

$=\{x+(y-2)\}^2+4y^2-4y+1$

$=(x+y-2)^2+(2y-1)^2\geqq0$

等号が成り立つのは，$x+y-2=0$ かつ $2y-1=0$，すなわち $x=\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ のときである。

(3)　$3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2=3x^2+3y^2+3z^2-(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)$

$=(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)$

$=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geqq0$

よって　　$3(x^2+y^2+z^2)\geqq(x+y+z)^2$

等号が成り立つのは，$x-y=0$ かつ $y-z=0$ かつ $z-x=0$，すなわち $x=y=z$ のときである。

4．$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。　$2\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{4a+b}$

解答　略

解説

$(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{4a+b})^2=(4a+4\sqrt{ab}+b)-(4a+b)=4\sqrt{ab}>0$

よって　$(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{4a+b})^2$

$2\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，$\sqrt{4a+b}>0$ であるから　$2\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{4a+b}$

5．不等式 $|a-b|\leqq|a|+|b|$ を証明せよ。

解答　略

解説

$$\begin{aligned}(|a|+|b|)^2-|a-b|^2&=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a-b)^2\\&=a^2+2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)\\&=2(|ab|+ab)\geqq 0\end{aligned}$$

よって　$|a-b|^2\leqq(|a|+|b|)^2$

$|a-b|\geqq 0$，$|a|+|b|\geqq 0$ であるから　$|a-b|\leqq|a|+|b|$

(等号が成り立つのは，$|ab|+ab=0$ すなわち $ab\leqq 0$ のときである。)

6．$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

(1)　$\dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{a}\geqq 2$　(2)　$\dfrac{b}{3a}+\dfrac{12a}{b}\geqq 4$　(3)　$\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\geqq 4$

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略

解説

(1)　$a>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$\dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{a}\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{2}{a}}=2$　　よって　$\dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{a}\geqq 2$

$\left(\text{等号が成り立つのは，}\dfrac{a}{2}=\dfrac{2}{a}\text{ すなわち }a=2\text{ のときである。}\right)$

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{b}{3a}>0$，$\dfrac{12a}{b}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$\dfrac{b}{3a}+\dfrac{12a}{b}\geqq 2\sqrt{\dfrac{b}{3a}\cdot\dfrac{12a}{b}}=2\sqrt{4}=4$　　よって　$\dfrac{b}{3a}+\dfrac{12a}{b}\geqq 4$

$\left(\text{等号が成り立つのは，}\dfrac{b}{3a}=\dfrac{12a}{b}\text{ すなわち }b=6a\text{ のときである。}\right)$

(3)　$\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{b}\right)=1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1=2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$

$a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{b}{a}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqq 2+2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=4$　　よって　$\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\geqq 4$

$\left(\text{等号が成り立つのは，}\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}\text{ すなわち }a=b\text{ のときである。}\right)$