

1. 次の多項式 A , B について, A を B で割った商と余りを求めよ。

(1) $A = x^2 + 5x + 6$, $B = x + 2$ (2) $A = a^2 - 4a + 2$, $B = a - 1$
(3) $A = 3x^2 - 4x - 4$, $B = 3x - 1$ (4) $A = x^2 - 3x - 5$, $B = 2x - 2$

2. 次の多項式 A , B について, A を B で割った商と余りを求めよ。また, 結果を等式 $A = BQ + R$ の形に書き表せ。

(1) $A = x^3 - 10x + 7$, $B = x - 3$ (2) $A = 2x^3 + 9x^2 + 13x + 10$, $B = 2x + 3$
(3) $A = x^3 + x + 3x^2 - 6$, $B = x^2 + 2x - 3$ (4) $A = 2x^3 - 3 + 5x$, $B = 3 - 2x + 2x^2$

3. 次の条件を満たす多項式 A , B を求めよ。

(1) A を $2x + 3$ で割ると, 商が $x^2 - 3x + 1$ で, 余りが 4
(2) $x^3 - 2x^2 + x + 7$ を B で割ると, 商が $x + 1$ で, 余りが 3

4. (1) $4x^3 + 7x + 3$ を $2x - 3$ で割った商と余りを求めよ。
(2) $x^3 - x^2 + 3x + 1$ をある多項式で割ると, 商が $x - 2$, 余りが $2x + 7$ である。この多項式を求めよ。

5. 次の式 A , B を x についての多項式とみて, A を B で割った商と余りを求めよ。

(1) $A = x^2 - 4xy + 3y^2$, $B = x - 3y$ (2) $A = 8x^2 + 10xy - 3y^2$, $B = 2x + 3y$
(3) $A = 8x^3 - 27y^3$, $B = 2x - 3y$ (4) $A = x^3 - 7xy^2 - 6y^3$, $B = x + 2y$

6. 次の条件を満たす多項式 B を求めよ。

(1) $x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 1$ を B で割ると, 商が $x^2 - 3x + 5$, 余りが $3x - 4$
(2) $x^4 + 1$ を B で割ると, 商が $x^2 - x$, 余りが $x + 1$

7. 次の分数式を約分して, 既約分数式で表せ。

(1) $\frac{24xy}{32x^3y^2}$ (2) $\frac{21xy^3}{35x^2y}$ (3) $\frac{x^2(x-2)}{x(x+2)(x-2)}$
(4) $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 6x + 8}$ (5) $\frac{2x^2 + 3x - 2}{4x^2 - 1}$ (6) $\frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}$

8. 次の計算をせよ。

(1) $\frac{3x^2}{4y^3} \times \frac{16y^2}{9x}$ (2) $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x - 15} \times \frac{x + 3}{x - 2}$
(3) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2} \times \frac{x - y}{x^2 + xy}$ (4) $\frac{x^2 - 9}{x^2} \div \frac{x + 3}{x^2 - 3x}$

9. 次の計算をせよ。

(1) $\frac{x^2-4}{x+1}+\frac{3}{x+1}$

(3) $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x+2}$

(5) $\frac{4}{x^2+2x-8}-\frac{5}{x^2+3x-10}$

(2) $\frac{3}{x(3-x)}+\frac{x}{3(x-3)}$

(4) $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}$

(6) $\frac{x-1}{x^2+3x+2}-\frac{x-3}{x^2+4x+3}$

10. 次の計算をせよ。

(1) $\frac{(-2ab)^2}{xy}\times\frac{x^4y^2}{-ab^2}$

(3) $\frac{x}{x^2-8x+15}+\frac{x}{x^2-12x+35}$

(2) $\frac{x^2-2x}{x^2-x-12}\div\frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$

(4) $\frac{2x-1}{x^2-x-20}-\frac{2x+1}{x^2+x-30}$

11. 次の計算をせよ。

(1) $\frac{x^2-8x-20}{3x^2+5x-2}\times\frac{3x^2-31x+10}{x^3-2x^2-80x}$

(2) $\frac{x^2+x-12}{x^2-4}\div\frac{x^2+3x-4}{x^2+5x+6}\times\frac{x^2-2x}{x^2-9}$

13. 次の計算をせよ。

(1) $\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}+\frac{2x}{x^2-y^2}$

(2) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4x}{x^4+1}$

12. 次の式を簡単にせよ。

(1) $\frac{x-\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}$

(2) $\frac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}}$

(3) $1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}$

14. 次の計算をせよ。

(1) $\frac{(-2ab)^2}{xy}\times\frac{x^4y^2}{-ab^2}$

(3) $\frac{x}{x^2-8x+15}+\frac{x}{x^2-12x+35}$

(2) $\frac{x^2-2x}{x^2-x-12}\div\frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$

(4) $\frac{2x-1}{x^2-x-20}-\frac{2x+1}{x^2+x-30}$

商 $x-y$, 余り 0

商 $4x-y$, 余り 0

$$\begin{array}{r} (3) \quad \frac{4x^2+6xy+9y^2}{2x-3y} \overline{) 8x^3 -27y^3} \\ \underline{8x^3-12x^2y} \\ 12x^2y \\ \underline{12x^2y-18xy^2} \\ 18xy^2-27y^3 \\ \underline{18xy^2-27y^3} \\ 0 \end{array}$$

商 $4x^2+6xy+9y^2$, 余り 0

$$\begin{array}{r} (4) \quad \frac{x^2-2xy-3y^2}{x+2y} \overline{) x^3 -7xy^2-6y^3} \\ \underline{x^3+2x^2y} \\ -2x^2y-7xy^2 \\ \underline{-2x^2y-4xy^2} \\ -3xy^2-6y^3 \\ \underline{-3xy^2-6y^3} \\ 0 \end{array}$$

商 $x^2-2xy-3y^2$, 余り 0

6. 次の条件を満たす多項式 B を求めよ。

(1) $x^4-3x^3+6x^2+1$ を B で割ると, 商が x^2-3x+5 , 余りが $3x-4$

(2) x^4+1 を B で割ると, 商が x^2-x , 余りが $x+1$

【解答】 (1) x^2+1 (2) x^2+x+1

【解説】

(1) 条件から, 次の等式が成り立つ。

$$x^4-3x^3+6x^2+1=B \times (x^2-3x+5)+3x-4$$

ゆえに $3x-4$ を移項して

$$\begin{array}{r} x^4-3x^3+6x^2-3x+5=B \times (x^2-3x+5) \quad x^2-3x+5 \overline{) x^4-3x^3+6x^2-3x+5} \\ \underline{x^4-3x^3+5x^2} \\ x^2-3x+5 \\ \underline{x^2-3x+5} \\ 0 \end{array}$$

よって, $x^4-3x^3+6x^2-3x+5$ は,

x^2-3x+5 で割り切れて, その商が B である。

右の計算により $B=x^2+1$

(2) 条件から, 次の等式が成り立つ。

$$x^4+1=B \times (x^2-x)+x+1$$

ゆえに $x+1$ を移項して $x^4-x=B \times (x^2-x)$

よって, x^4-x は, x^2-x で割り切れて,

その商が B である。

右の計算により $B=x^2+x+1$

7. 次の分数式を約分して, 既約分数式で表せ。

$$(1) \quad \frac{24xy}{32x^3y^2} \qquad (2) \quad \frac{21xy^3}{35x^2y} \qquad (3) \quad \frac{x^2(x-2)}{x(x+2)(x-2)}$$

$$(4) \quad \frac{x^2-x-6}{x^2+6x+8} \qquad (5) \quad \frac{2x^2+3x-2}{4x^2-1} \qquad (6) \quad \frac{x^3+1}{x^2-x-2}$$

$$\text{【解答】} \quad (1) \quad \frac{3}{4x^2y} \quad (2) \quad \frac{3y^2}{5x} \quad (3) \quad \frac{x}{x+2} \quad (4) \quad \frac{x-3}{x+4} \quad (5) \quad \frac{x+2}{2x+1}$$

$$(6) \quad \frac{x^2-x+1}{x-2}$$

【解説】

$$(1) \quad (\text{与式}) = \frac{8xy \cdot 3}{8xy \cdot 4x^2y} = \frac{3}{4x^2y}$$

$$(2) \quad (\text{与式}) = \frac{7xy \cdot 3y^2}{7xy \cdot 5x} = \frac{3y^2}{5x}$$

$$(3) \quad (\text{与式}) = \frac{x}{x+2}$$

$$(4) \quad (\text{与式}) = \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+4)} = \frac{x-3}{x+4}$$

$$(5) \quad (\text{与式}) = \frac{(x+2)(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{x+2}{2x+1}$$

$$(6) \quad (\text{与式}) = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x^2-x+1}{x-2}$$

8. 次の計算をせよ。

$$(1) \quad \frac{3x^2}{4y^3} \times \frac{16y^2}{9x} \qquad (2) \quad \frac{x^2+2x-8}{x^2-2x-15} \times \frac{x+3}{x-2}$$

$$(3) \quad \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2} \times \frac{x-y}{x^2+xy} \qquad (4) \quad \frac{x^2-9}{x^2} \div \frac{x+3}{x^2-3x}$$

$$\text{【解答】} \quad (1) \quad \frac{4x}{3y} \quad (2) \quad \frac{x+4}{x-5} \quad (3) \quad \frac{1}{x} \quad (4) \quad \frac{(x-3)^2}{x}$$

【解説】

$$(1) \quad (\text{与式}) = \frac{3x^2 \cdot 16y^2}{4y^3 \cdot 9x} = \frac{4x}{3y}$$

$$(2) \quad (\text{与式}) = \frac{(x-2)(x+4)}{(x+3)(x-5)} \times \frac{x+3}{x-2} = \frac{x+4}{x-5}$$

$$(3) \quad (\text{与式}) = \frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2} \times \frac{x-y}{x(x+y)} = \frac{1}{x}$$

$$(4) \quad (\text{与式}) = \frac{x^2-9}{x^2} \times \frac{x^2-3x}{x+3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x^2} \times \frac{x(x-3)}{x+3} = \frac{(x-3)^2}{x}$$

9. 次の計算をせよ。

$$(1) \quad \frac{x^2-4}{x+1} + \frac{3}{x+1} \qquad (2) \quad \frac{3}{x(3-x)} + \frac{x}{3(x-3)}$$

$$(3) \quad \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+2} \qquad (4) \quad \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6}$$

$$(5) \quad \frac{4}{x^2+2x-8} - \frac{5}{x^2+3x-10} \qquad (6) \quad \frac{x-1}{x^2+3x+2} - \frac{x-3}{x^2+4x+3}$$

$$\text{【解答】} \quad (1) \quad x-1 \quad (2) \quad \frac{x+3}{3x} \quad (3) \quad \frac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)} \quad (4) \quad \frac{2}{(x+1)(x+3)}$$

$$(5) \quad -\frac{x}{(x-2)(x+4)(x+5)} \quad (6) \quad \frac{3}{(x+2)(x+3)}$$

【解説】

$$(1) \quad (\text{与式}) = \frac{(x^2-4)+3}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$$

$$(2) \quad (\text{与式}) = -\frac{3}{x(x-3)} + \frac{x}{3(x-3)} = \frac{-3^2+x^2}{3x(x-3)} = \frac{(x+3)(x-3)}{3x(x-3)} = \frac{x+3}{3x}$$

$$(3) \quad (\text{与式}) = \frac{x(x+2)}{(x+1)(x+2)} - \frac{x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{x(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad (\text{与式}) &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{x+3}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{2(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{2}{(x+1)(x+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad (\text{与式}) &= \frac{4}{(x-2)(x+4)} - \frac{5}{(x-2)(x+5)} \\ &= \frac{4(x+5)}{(x-2)(x+4)(x+5)} - \frac{5(x+4)}{(x-2)(x+4)(x+5)} \\ &= \frac{4(x+5)-5(x+4)}{(x-2)(x+4)(x+5)} = -\frac{x}{(x-2)(x+4)(x+5)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad (\text{与式}) &= \frac{x-1}{(x+1)(x+2)} - \frac{x-3}{(x+1)(x+3)} \\ &= \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} - \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{(x-1)(x+3)-(x-3)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{3(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{3}{(x+2)(x+3)} \end{aligned}$$

10. 次の計算をせよ。

$$(1) \quad \frac{(-2ab)^2}{xy} \times \frac{x^4y^2}{-ab^2} \qquad (2) \quad \frac{x^2-2x}{x^2-x-12} \div \frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$$

$$(3) \quad \frac{x}{x^2-8x+15} + \frac{x}{x^2-12x+35} \qquad (4) \quad \frac{2x-1}{x^2-x-20} - \frac{2x+1}{x^2+x-30}$$

$$\text{【解答】} \quad (1) \quad -4ax^3y \quad (2) \quad \frac{x}{x-4} \quad (3) \quad \frac{2x}{(x-3)(x-7)} \quad (4) \quad \frac{2}{(x+4)(x+6)}$$

【解説】

$$(1) \quad (\text{与式}) = \frac{4a^2b^2}{xy} \times \frac{x^4y^2}{-ab^2} = -4ax^3y$$

$$(2) \quad (\text{与式}) = \frac{x^2-2x}{x^2-x-12} \times \frac{x^2+5x+6}{x^2-4} = \frac{x(x-2)}{(x+3)(x-4)} \times \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x}{x-4}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (\text{与式}) &= \frac{x}{(x-3)(x-5)} + \frac{x}{(x-5)(x-7)} = \frac{x\{(x-7)+(x-3)\}}{(x-3)(x-5)(x-7)} \\ &= \frac{x \cdot 2(x-5)}{(x-3)(x-5)(x-7)} = \frac{2x}{(x-3)(x-7)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad (\text{与式}) &= \frac{2x-1}{(x+4)(x-5)} - \frac{2x+1}{(x-5)(x+6)} = \frac{(2x-1)(x+6)-(2x+1)(x+4)}{(x+4)(x-5)(x+6)} \\ &= \frac{2(x-5)}{(x+4)(x-5)(x+6)} = \frac{2}{(x+4)(x+6)} \end{aligned}$$

11. 次の計算をせよ。

$$(1) \quad \frac{x^2-8x-20}{3x^2+5x-2} \times \frac{3x^2-31x+10}{x^3-2x^2-80x} \qquad (2) \quad \frac{x^2+x-12}{x^2-4} \div \frac{x^2+3x-4}{x^2+5x+6} \times \frac{x^2-2x}{x^2-9}$$

$$\text{【解答】} \quad (1) \quad \frac{x-10}{x(x+8)} \quad (2) \quad \frac{x}{x-1}$$

【解説】

$$(1) \quad (\text{与式}) = \frac{(x+2)(x-10)}{(x+2)(3x-1)} \times \frac{(x-10)(3x-1)}{x(x+8)(x-10)} = \frac{x-10}{x(x+8)}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (\text{与式}) &= \frac{x^2+x-12}{x^2-4} \times \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x-4} \times \frac{x^2-2x}{x^2-9} \\ &= \frac{(x-3)(x+4)}{(x+2)(x-2)} \times \frac{(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)} \times \frac{x(x-2)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

12. 次の式を簡単にせよ。

(1) $\frac{x-\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}$

(2) $\frac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}}$

(3) $1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}$

【解答】

(1) $x+2$

(2) $\frac{1}{x}$

(3) $\frac{1}{x}$

【解説】

(1) 分子、分母をそれぞれ先に通分してしまう。そして、 $\frac{\text{分子}}{\text{分母}}$ を分子÷分母と書きなおす。

(与式) $=\frac{\frac{x^2-4}{x}}{\frac{x-2}{x}}=\frac{x^2-4}{x}\div\frac{x-2}{x}=\frac{x^2-4}{x}\times\frac{x}{x-2}$

$=\frac{(x+2)(x-2)}{x}\times\frac{x}{x-2}=x+2$

【別解】 分子分母に x をかけると、分子も分母も分数の形を回避できる。

(与式) $=\frac{x\left(x-\frac{4}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$

(2) 分子、分母をそれぞれ先に通分してしまう。そして、 $\frac{\text{分子}}{\text{分母}}$ を分子÷分母と書きなおす。

(与式) $=\frac{\frac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)}}{\frac{1+x-(1-x)}{(1-x)(1+x)}}=\frac{\frac{2}{(1-x)(1+x)}}{\frac{2x}{(1-x)(1+x)}}=\frac{2}{(1-x)(1+x)}\div\frac{2x}{(1-x)(1+x)}$

$=\frac{2}{(1-x)(1+x)}\times\frac{(1-x)(1+x)}{2x}=\frac{1}{x}$

【別解】 分子分母に $(1-x)(1+x)$ をかけると、分子も分母も分数の形を回避できる。

(与式) $=\frac{(1-x)(1+x)\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)}{(1-x)(1+x)\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)}=\frac{1+x+1-x}{1+x-(1-x)}=\frac{1}{x}$

(3) (与式) $=1-\frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}}=1-\frac{1}{\frac{x}{x-1}}=1-\frac{x-1}{x}=\frac{x-(x-1)}{x}=\frac{1}{x}$

【参考】

$\frac{1}{\frac{x}{x-1}}$ は $\frac{1}{\frac{x}{x-1}}=1\div\frac{x}{x-1}=1\times\frac{x-1}{x}=\frac{x-1}{x}$ となる

13. 次の計算をせよ。

(1) $\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}+\frac{2x}{x^2-y^2}$

(2) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4x}{x^4+1}$

【解答】

(1) $\frac{2}{x+y}$

(2) $\frac{8x}{x^8-1}$

【解説】

(1) (与式) $=\frac{x-y-(x+y)}{(x+y)(x-y)}+\frac{2x}{x^2-y^2}=\frac{-2y}{(x+y)(x-y)}+\frac{2x}{(x+y)(x-y)}$

$=\frac{2(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{2}{x+y}$

(2) (与式) $=\frac{x+1+x-1}{(x-1)(x+1)}-\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4x}{x^4+1}=\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4x}{x^4+1}$

$=\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}-\frac{4x}{x^4+1}=\frac{4x}{x^4-1}-\frac{4x}{x^4+1}$

$=\frac{4x\{x^4+1-(x^4-1)\}}{(x^4-1)(x^4+1)}=\frac{4x\cdot 2}{(x^4-1)(x^4+1)}=\frac{8x}{(x^4-1)(x^4+1)}=\frac{8x}{x^8-1}$

14. 次の計算をせよ。

(1) $\frac{(-2ab)^2}{xy}\times\frac{x^4y^2}{-ab^2}$

(2) $\frac{x^2-2x}{x^2-x-12}\div\frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$

(3) $\frac{x}{x^2-8x+15}+\frac{x}{x^2-12x+35}$

(4) $\frac{2x-1}{x^2-x-20}-\frac{2x+1}{x^2+x-30}$

【解答】

(1) $-4ax^3y$

(2) $\frac{x}{x-4}$

(3) $\frac{2x}{(x-3)(x-7)}$

(4) $\frac{2}{(x+4)(x+6)}$

【解説】

(1) (与式) $=\frac{4a^2b^2}{xy}\times\frac{x^4y^2}{-ab^2}=-4ax^3y$

(2) (与式) $=\frac{x^2-2x}{x^2-x-12}\times\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}=\frac{x(x-2)}{(x+3)(x-4)}\times\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x}{x-4}$

(3) (与式) $=\frac{x}{(x-3)(x-5)}+\frac{x}{(x-5)(x-7)}=\frac{x\{(x-7)+(x-3)\}}{(x-3)(x-5)(x-7)}$

$=\frac{x\cdot 2(x-5)}{(x-3)(x-5)(x-7)}=\frac{2x}{(x-3)(x-7)}$

(4) (与式) $=\frac{2x-1}{(x+4)(x-5)}-\frac{2x+1}{(x-5)(x+6)}=\frac{(2x-1)(x+6)-(2x+1)(x+4)}{(x+4)(x-5)(x+6)}$

$=\frac{2(x-5)}{(x+4)(x-5)(x+6)}=\frac{2}{(x+4)(x+6)}$