第１回統一テスト（式と証明）　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

1. 等式$(k+1)x-(3k+2)y+2k+7=0$がどんなkの値に対しても成り立つように，定数x，yの値を定めよ。

2. $\dfrac{x+2y}{2}=\dfrac{y+3z}{3}=\dfrac{z+4x}{4}\neq 0$ のとき，$\dfrac{3x^2-10y^2+5z^2}{2x^2-6y^2-3z^2}$の値を求めよ。

3. $a\geqq b$，$c\geqq d$ の時，次の不等式を証明せよ。　$ac+bd\geqq ad+bc$

4. 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのような時か。

$$x^2-xy+y^2+x-2y+1\geqq 0$$

5. 次の不等式を証明せよ。また等号はどのようなときに成り立つか。　$|a+b|\leqq|a|+|b|$

6. $a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのような時か。

$$\left(a+\frac{1}{2b}\right)\left(2b+\frac{9}{a}\right)\geqq 16$$

7. どんな整数nに対しても，$2n^2+2n+1$は３で割り切れないことを示せ。

8. $U=\{n\mid n$は$1\leqq n\leqq 24$を満たす整数$\}$の部分集合A，B，Cを $A=\{n\mid n$ は 16 の正の約数$\}$，$B=\{n\mid n$ は 24 の正の約数$\}$，$C=\{n\mid n$ は 8 以下の自然数$\}$ とするとき，次の集合を求めよ。

(1)　$(A\cap\overline{B})\cup C$　　　(2)　$\overline{A}\cup(B\cap\overline{C})$

9. x，y は実数とする。次の $\boxed{}$ の中に，必要条件，十分条件，必要十分条件のうち最も適当なものを入れ，いずれでもない場合には×印をつけよ。

(1)　$x=2$ は $x^2-5x+6=0$ であるための $\boxed{}$

(2)　$x\neq 0$ は $(x-1)(x-2)=0$ であるための $\boxed{}$

(3)　$xy=1$ は $x=1$ であるための $\boxed{}$

(4)　$|x|=0$ は $x=0$ であるための $\boxed{}$

(5)　$x=y=2$ は $2x-y=2y-2=2$ であるための $\boxed{}$

(6)　四角形 ABCD がひし形であることは，四角形 ABCD が正方形であるための $\boxed{}$

10. x，y は実数とする。次の $\boxed{}$ の中に，必要条件，十分条件，必要十分条件のうち最も適当なものを入れ，いずれでもない場合には×印をつけよ。

(1)　$xy=0$ は $x=0$ であるための $\boxed{}$

(2)　$xy\neq 0$ は $x\neq 0$ であるための $\boxed{}$

(3)　$xy>1$ は $x>1$ であるための $\boxed{}$

(4)　△ABC の３辺が等しいことは，△ABC の３つの角が等しいための $\boxed{}$

11. a，b は実数とする。$\boxed{}$ 内に，必要条件，十分条件，必要十分条件のうち最も適当なものを入れ，いずれでもない場合には×印をつけよ。

(1)　$ab>0$ は，$a^2+b^2>0$ が成立するための $\boxed{}$

(2)　$|a|<1$ かつ $|b|<1$ は，$a^2+b^2<1$ が成立するための $\boxed{}$

(3)　$a\geqq 0$ は，$\sqrt{a^2}=a$ が成立するための $\boxed{}$

第１回統一テスト（式と証明）　　（　　）組（　　）番　名前（ こたこ 　）

1． 等式$(k+1)x-(3k+2)y+2k+7=0$がどんなkの値に対しても成り立つように，定数x，yの値を定めよ。

$kx+x-3ky-2y+2k+7=0$

$(x-3y+2)k+(x-2y+7)=0$

kについての恒等式より

$\begin{cases} x-3y+2=0 \\ x-2y+7=0 \end{cases}$

解いて　$x=-17,\ y=-5$ //

(8)

2． $\frac{x+2y}{2}=\frac{y+3z}{3}=\frac{z+4x}{4}\neq 0$ のとき，$\frac{3x^2-10y^2+5z^2}{2x^2-6y^2-3z^2}$ の値を求めよ。

$\frac{x+2y}{2}=\frac{y+3z}{3}=\frac{z+4x}{4}=k$ とおくと

$\begin{cases} x+2y=2k \\ y+3z=3k \\ z+4x=4k \end{cases}$

解いて

$x=\frac{4}{5}k,\ y=\frac{3}{5}k,\ z=\frac{4}{5}k$

これらを代入する

$\frac{3x^2-10y^2+5z^2}{2x^2-6y^2-3z^2}$

$=\frac{3(\frac{4}{5}k)^2-10(\frac{3}{5}k)^2+5(\frac{4}{5}k)^2}{2(\frac{4}{5}k)^2-6(\frac{3}{5}k)^2-3(\frac{4}{5}k)^2}$

$=\frac{3\cdot4^2-10\cdot3^2+5\cdot4^2}{2\cdot4^2-6\cdot3^2-3\cdot4^2}$

$=\frac{38}{-70}=-\frac{19}{35}$ //

(8)

3． $a\geqq b$，$c\geqq d$ の時，次の不等式を証明せよ。

$ac+bd\geqq ad+bc$

証）(左辺)−(右辺)

$=(ac+bd)-(ad+bc)$

$=a(c-d)+b(d-c)$

$=a(c-d)-b(c-d)$

$=(a-b)(c-d)$

$a\geqq b,\ c\geqq d$ より

$a-b\geqq0,\ c-d\geqq0$

∴ よって

$(a-b)(c-d)\geqq0$

より (左辺)−(右辺)≧0

∴

(左辺)≧(右辺) //

(8)

4． 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのような時か。

$x^2-xy+y^2+x-2y+1\geqq0$

証）(左辺) $=x^2-xy+y^2+x-2y+1$

$=x^2-(y-1)x+y^2-2y+1$

$=(x-\frac{y-1}{2})^2-(\frac{y-1}{2})^2+y^2-2y+1$

$=(x-\frac{y-1}{2})^2+\frac{4y^2-8y+4-y^2+2y-1}{4}$

$=(x-\frac{y-1}{2})^2+\frac{3y^2-6y+3}{4}$

$=(x-\frac{y-1}{2})^2+\frac{3}{4}(y-1)^2$

ここで

$(x-\frac{y-1}{2})^2\geqq0,\ (y-1)^2\geqq0$

より

$(x-\frac{y-1}{2})^2+(y-1)^2\geqq0$

∴

(左辺)≧(右辺)

また等号は

$x-\frac{y-1}{2}=0,\ y-1=0$

∴

$x=0,\ y=1$の時

成り立つ //

(8)

5． 次の不等式を証明せよ。また等号はどのようなときに成り立つか。　$|a+b|\leqq|a|+|b|$

証）(左辺)²−(右辺)²

$=|a+b|^2-(|a|+|b|)^2$

$=(a+b)^2-(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)$

$=(a^2+2ab+b^2)-(a^2+2|ab|+b^2)$

$=2ab-2|ab|$

$=2(ab-|ab|)$

ここで $|ab|\geqq ab$ であるので

$ab-|ab|\leqq0$

∴ (左辺)²−(右辺)²≦0

より (左辺)²≦(右辺)²

また (左辺)≧0，(右辺)≧0

より (左辺)≦(右辺)

が成り立つ

等号は　$ab=|ab|$

より　$ab\geqq0$ の時 //

(10)

6． $a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのような時か。

$\left(a+\frac{1}{2b}\right)\left(2b+\frac{9}{a}\right)\geqq16$

証）

(左辺) $=(a+\frac{1}{2b})(2b+\frac{9}{a})$

$=2ab+9+1+\frac{9}{2ab}$

$=2ab+\frac{9}{2ab}+10$

ここで $a>0,\ b>0$ より

$2ab>0,\ \frac{9}{2ab}>0$ より

相加・相乗平均の関係から

$2ab+\frac{9}{2ab}\geqq2\sqrt{2ab\cdot\frac{9}{2ab}}=6$ …(*)

よって(*)式の両辺に10を加えて

$2ab+\frac{9}{2ab}+10\geqq16$

∴ (左辺)≧(右辺)

が成り立つ

また等号は

$2ab=\frac{9}{2ab}$

∴ $4a^2b^2=9$ より $a>0,\ b>0$

$ab=\frac{3}{2}$ の時 //

7． どんな整数nに対しても，$2n^2+2n+1$は３で割り切れないことを示せ。

・$n=3k$の時

$2(3k)^2+2(3k)+1=18k^2+6k+1=3(6k^2+2k)+1$ となり

3の倍数でない

・$n=3k+1$の時

$2(3k+1)^2+2(3k+1)+1=18k^2+18k+5=3(6k^2+6k+1)+2$ とな

3の倍数でない。

・$n=3k+2$の時

$2(3k+2)^2+2(3k+2)+1=18k^2+30k+13=3(6k^2+10k+4)+1$ となり

3の倍数でない

以上より，どんな整数に対しても $2n^2+2n+1$ は3の倍数にはならない //

(8)

8． $A=\{n\mid n$は16の正の約数$\}$，$B=\{n\mid n$は24の正の約数$\}$，$C=\{n\mid n$は8以下の自然数$\}$ とするとき，次の集合を求めよ。

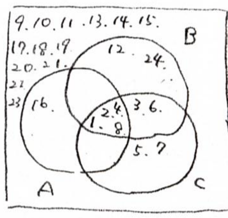
(1) $(A\cap\overline{B})\cup C$　　(2) $\overline{A}\cup(B\cap\overline{C})$

$U=\{1,2,3,\cdots,24\}$

$A=\{1,2,4,8,16\}$

$B=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

$C=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$



(1)

$(A\cap\overline{B})\cup C$

$=\{1,2,3,4,5,6,7,8,16\}$

(8)

(2)

$\overline{A}\cup(B\cap\overline{C})$

$=\{3,5,6,7,9,10,\cdots,15,$

$17,18,\cdots,24\}$

(8)

9． x，yは実数とする。次の□の中に，必要条件，十分条件，必要十分条件のうち最も適当なものを入れ，いずれでもない場合には×印をつけよ。　(各2)

(1) $x=2$は$x^2-5x+6=0$であるための□　十分条件

(2) $x\neq0$は$(x-1)(x-2)=0$であるための□　必要条件

(3) $xy=1$は$x=1$であるための□　×

(4) $|x|=0$は$x=0$であるための□　必要十分条件

(5) $x=y=2$は$2x-y=2y-2=2$であるための□　必要十分条件

(6) 四角形ABCDがひし形であることは，四角形ABCDが正方形であるための□　必要条件

10． x，yは実数とする。次の□の中に，必要条件，十分条件，必要十分条件のうち最も適当なものを入れ，いずれでもない場合には×印をつけよ。　(各2)

(1) $xy=0$は$x=0$であるための□　必要条件

(2) $xy\neq0$は$x\neq0$であるための□　十分条件

(3) $xy>1$は$x>1$であるための□　×

(4) △ABCの3辺が等しいことは，△ABCの3つの角が等しいための□　必要十分条件

11． a，bは実数とする。□内に，必要条件，十分条件，必要十分条件のうち最も適当なものを入れ，いずれでもない場合には×印をつけよ。　(各2)

(1) $ab>0$は，$a^2+b^2>0$が成立するための□　十分条件

(2) $|a|<1$ かつ $|b|<1$は，$a^2+b^2<1$が成立するための□　必要条件

(3) $a\geqq0$は，$\sqrt{a^2}=a$が成立するための□　必要十分条件