第１回統一テスト（式と証明）　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1. 等式 $x^3=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

2. x^3+ax+b が x^2+4x-2 で割り切れるとき，定数 a，b の値と商を求めよ。

3. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，等式 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\dfrac{ab}{cd}$ が成り立つことを証明せよ。

4. $a>-1$，$b<2$ の時，次の不等式を証明せよ。　$ab-2<2a-b$

5. $abc=8$，$ab+bc+ca=2(a+b+c)$ ならば，a，b，c のうち少なくとも１つは２であることを証明せよ。

6. 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのような時か。

$$x^2+y^2 \geqq 4x-6y-13$$

7. $a>0$，$b>0$ の時，次の不等式を証明せよ。　$\sqrt{4a+b}<2\sqrt{a}+\sqrt{b}$

8. $a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのような時か。

$$\frac{b}{a}+\frac{9a}{4b} \geqq 3$$

9. n を整数とするとき，$n(n^2+2)$ は３の倍数となることを証明せよ。

10. 以下の問いに答えよ。

(1) ４桁の整数「１２５□」が３の倍数であるとき，□に入る数字を答えよ。

(2) ４桁の整数「８２△□」が４５の倍数であるとき，△と□に入る数字を答えよ。

第1回統一テスト（式と証明）　(各10点)(6.8で等号なしは-5)　(　)組(　)番　名前(こたえ)

1．等式 $x^3=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$ がxについての恒等式となるように，定数 a,b,c の値を定めよ。

(右辺) $=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$=x^3-3x^2+3x-1+a(x^2-2x+1)+b(x-1)+c$

$=x^3+(-3+a)x^2+(3-2a+b)x+(-1+a-b+c)$

係数を比較して

$$\begin{cases} -3+a=0 & (x^2\text{の係数}) \\ 3-2a+b=0 & (x\text{の係数}) \\ -1+a-b+c=0 & (\text{定数項}) \end{cases}$$

∴ $a=3,\ b=3,\ c=1$

(各3)

2．x^3+ax+b が x^2+4x-2 で割り切れるとき，定数a,bの値と商を求めよ。

商は $x+k$ とおける。

$x^3+ax+b=(x^2+4x-2)(x+k)$

が恒等式より，(右辺)を展開して，整理して比較する。

(右辺) $=x^3+(4+k)x^2+(-2+4k)x-2k$　(各3)

∴ $\begin{cases} 4+k=0 \\ -2+4k=a \\ -2k=b \end{cases}$　∴ $k=-4,\ a=-18,\ b=8$

よって $a=-18,\ b=8$，商 $x-4$

3．$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，等式 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\dfrac{ab}{cd}$ が成り立つことを証明せよ。

証) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと

$a=bk,\ c=dk$ とかける。

この時

(左辺) $=\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\dfrac{(bk)^2+b^2}{(dk)^2+d^2}=\dfrac{b^2\cancel{(k^2+1)}}{d^2\cancel{(k^2+1)}}=\dfrac{b^2}{d^2}$

(右辺) $=\dfrac{ab}{cd}=\dfrac{bk\cdot b}{dk\cdot d}=\dfrac{b^2k}{d^2k}=\dfrac{b^2}{d^2}$

ゆえに (左辺)=(右辺) //

4．$a>-1,\ b<2$ の時，次の不等式を証明せよ。　$ab-2<2a-b$

証) (左辺)−(右辺)

$=(ab-2)-(2a-b)$

$=ab-2a+b-2$

$=a(b-2)+(b-2)$

$=(a+1)(b-2)$

ここで，$a>-1,\ b<2$ より

$a+1>0,\ b-2<0$

よって $(a+1)(b-2)<0$

であるので

(左辺)<(右辺)

が成り立つ。//

5．$abc=8,\ ab+bc+ca=2(a+b+c)$ ならば，a,b,c のうち少なくとも1つは2であることを証明せよ。

証) a,b,c のうち少なくとも1つが2である事を示すには

$(a-2)(b-2)(c-2)=0$ が成り立つ事を示せばよい。

∴ (左辺) $=(a-2)(b-2)(c-2)$

$=(ab-2a-2b+4)(c-2)$

$=abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8$ …(*)

ここで $abc=8,\ ab+bc+ca=2(a+b+c)$ より

(*)式 $=8-2\times2(a+b+c)+4(a+b+c)-8$

$=0$

∴ $(a-2)(b-2)(c-2)=0$ が成り立つ。//

6．次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのような時か。

$$x^2+y^2\geqq 4x-6y-13$$

証) (左辺)−(右辺)

$=x^2+y^2-(4x-6y-13)$

$=x^2+y^2-4x+6y+13$

$=(x-2)^2-4+(y+3)^2-9+13$

$=(x-2)^2+(y+3)^2$

ここで $(x-2)^2\geqq0,\ (y+3)^2\geqq0$

より $(x-2)^2+(y+3)^2\geqq0$

∴ (左辺)≧(右辺) が成り立つ。

また等号は，$(x-2)^2+(y+3)^2=0$

つまり $x-2=0,\ y+3=0$

より $x=2,\ y=-3$ の時 //

7．$a>0,\ b>0$ の時，次の不等式を証明せよ。　$\sqrt{4a+b}<2\sqrt{a}+\sqrt{b}$

証) $(\text{左辺})^2-(\text{右辺})^2$

$=(\sqrt{4a+b})^2-(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$=4a+b-(4a+b+4\sqrt{ab})$

$=-4\sqrt{ab}$

ここで，$-4\sqrt{ab}<0$ より

$(\text{左辺})^2<(\text{右辺})^2$

が成り立つ。

ここで $a>0,\ b>0$ より

(左辺)>0, (右辺)>0

なので，

$(\text{左辺})^2<(\text{右辺})^2$

が成り立つことより

(左辺)<(右辺)

が成り立つ。//

8．$a>0,\ b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのような時か。　$\dfrac{b}{a}+\dfrac{9a}{4b}\geqq3$

証) $a>0,\ b>0$ より

$\dfrac{b}{a}>0,\ \dfrac{9a}{4b}>0$ であるので，

相加・相乗平均の関係より

(左辺) $=\dfrac{b}{a}+\dfrac{9a}{4b}$

$\geqq2\sqrt{\dfrac{b}{a}\times\dfrac{9a}{4b}}=2\sqrt{\dfrac{9}{4}}=2\times\dfrac{3}{2}=3$

∴ (左辺)≧(右辺) が成り立つ。

また等号は，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{9a}{4b}$

∴ $4b^2=9a^2$ の時

$a>0,\ b>0$ より

$3a=2b$ の時 //

9．nを整数とするとき，$n(n^2+2)$は3の倍数となることを証明せよ。

証) 整数を3で割った余りは0, 1, 2 であるので，

整数nは $n=3k,\ n=3k+1,\ n=3k+2$ (k:整数)

のいずれかで表すことができる。

・$n=3k$ の時

$n(n^2+2)=3k\cdot(9k^2+2)=3\times k(9k^2+2)$ より 3の倍数

・$n=3k+1$ の時

$n(n^2+2)=(3k+1)(9k^2+6k+1+2)=3\times(3k+1)(3k^2+2k+1)$

より 3の倍数

・$n=3k+2$ の時

$n(n^2+2)=(3k+2)(9k^2+12k+4+2)=3\times(3k+2)(3k^2+4k+2)$

より 3の倍数

以上より $n(n^2+2)$ は3の倍数となる //

10．以下の問いに答えよ。

(1) 4桁の整数「125□」が3の倍数であるとき，□に入る数字を答えよ。

各桁の数字を足したものが3の倍数となればよい。

よって，$1+2+5+□$

$=8+□$

これが3の倍数になるためには

$8+□=9,12,15$

∴ □=1, 4, 7

5

(2) 4桁の整数「82△□」が45の倍数であるとき，△と□に入る数字を答えよ。

45の倍数 = 9の倍数 かつ 5の倍数

82△□ が9の倍数になるのは

8+2+△+□ が9の倍数になる時であり

82△□ が5の倍数になるのは，□が0か5の時

□が0の時　8+2+△+□ = 10+△ より △=8

□が5の時　8+2+△+5 = 15+△ より △=3

∴ (△,□) = (8, 0), (3, 5)

5