数学演習（相加相乗平均の関係）Ｈ２９．４．１６　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

1．次の 2 数の相加平均と相乗平均をそれぞれ求めよ。

(1)　4 と 9　　(2)　7 と 7　　(3)　10 と 1000

2．a，b は正の数とする。次の不等式が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a+\dfrac{4}{a}\geqq 4$　　(2)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

3．a，b は正の数とする。次の不等式が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a+2+\dfrac{9}{a+2}\geqq 6$　　(2)　$\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{8}{a}\right)\geqq 18$

4．(1)　$x>0$ のとき，$x+\dfrac{16}{x+2}$ の最小値を求めよ。

(2)　$x>0$，$y>0$ とする。$(3x+2y)\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}\right)$ の最小値を求めよ。

5．(1)　$a>0$ のとき，$a-2+\dfrac{2}{a+1}$ の最小値を求めよ。

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，$(2a+3b)\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{3}{b}\right)$ の最小値を求めよ。

6．(1)　実数 a，b が $a>0$，$b>0$，$ab=6$ を満たすとき，$3a+8b$ の最小値は $\boxed{}$ である。

(2)　$x^2+2x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x+2}+2$ は，$x=$ ア$\boxed{}$ のとき，最小値 イ$\boxed{}$ をとる。ただし，$x>0$ とする。

(3)　$x>0$，$y>0$，$z>0$ とする。$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{4}$ のとき，$x+2y+3z$ の最小値を求めよ。

7．$x>0$ のとき，$\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$ の最大値を求めよ。

1．次の２数の相加平均と相乗平均をそれぞれ求めよ。

(1)　4 と 9　　(2)　7 と 7　　(3)　10 と 1000

解答　相加平均，相乗平均の順に　(1)　$\frac{13}{2}$，6　　(2)　7，7　　(3)　505，100

解説

(1)　4 と 9 の　相加平均は　$\frac{4+9}{2}=\frac{13}{2}$

相乗平均は　$\sqrt{4\times 9}=\sqrt{36}=6$

(2)　7 と 7 の　相加平均は　$\frac{7+7}{2}=7$

相乗平均は　$\sqrt{7\times 7}=\sqrt{49}=7$

(3)　10 と 1000 の　相加平均は　$\frac{10+1000}{2}=\frac{1010}{2}=505$

相乗平均は　$\sqrt{10\times 1000}=\sqrt{10000}=100$

2．a，b は正の数とする。次の不等式が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a+\frac{4}{a}\geqq 4$　　(2)　$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)\geqq 9$

解答　(1)　証明略，$a=2$　　(2)　証明略，$ab=2$

解説

(1)　$a>0$，$\frac{4}{a}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$a+\frac{4}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=2\cdot 2=4$　　よって　$a+\frac{4}{a}\geqq 4$

等号が成り立つのは　$a=\frac{4}{a}$　すなわち　$a=2$ のとき。

別解　$\left(a+\frac{4}{a}\right)-4=\frac{a^2+4-4a}{a}=\frac{(a-2)^2}{a}\geqq 0$

したがって　$a+\frac{4}{a}\geqq 4$

等号が成り立つのは，$a=2$ のときである。

(2)　(左辺)$=ab+4+1+\frac{4}{ab}=ab+\frac{4}{ab}+5$

$ab>0$，$\frac{4}{ab}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$ab+\frac{4}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}=2\cdot 2=4$

よって　$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+\frac{4}{ab}+5\geqq 4+5=9$

等号が成り立つのは　$ab=\frac{4}{ab}$　すなわち　$ab=2$ のとき。

3．a，b は正の数とする。次の不等式が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a+2+\frac{9}{a+2}\geqq 6$　　(2)　$\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{8}{a}\right)\geqq 18$

解答　(1)　証明略，$a=1$　　(2)　証明略，$ab=4$

解説

(1)　$a+2>0$，$\frac{9}{a+2}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$a+2+\frac{9}{a+2}\geqq 2\sqrt{(a+2)\cdot\frac{9}{a+2}}=2\sqrt{9}=6$

よって　$a+2+\frac{9}{a+2}\geqq 6$

等号が成り立つのは　$a+2=\frac{9}{a+2}$　すなわち　$a=1$ のとき。

(2)　(左辺)$=ab+8+2+\frac{16}{ab}=ab+\frac{16}{ab}+10$

$ab>0$，$\frac{16}{ab}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$ab+\frac{16}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{16}{ab}}=8$

よって　$\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{8}{a}\right)=ab+\frac{16}{ab}+10\geqq 8+10=18$

等号が成り立つのは　$ab=\frac{16}{ab}$　すなわち　$ab=4$ のとき。

4．(1)　$x>0$ のとき，$x+\frac{16}{x+2}$ の最小値を求めよ。

(2)　$x>0$，$y>0$ とする。$(3x+2y)\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{y}\right)$ の最小値を求めよ。

解答　(1)　$x=2$ のとき最小値 6　　(2)　$x=y$ のとき最小値 25

解説

(1)　$x+\frac{16}{x+2}=x+2+\frac{16}{x+2}-2$

$x>0$ より $x+2>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$x+2+\frac{16}{x+2}\geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{16}{x+2}}=2\cdot 4=8$

ゆえに　$x+\frac{16}{x+2}\geqq 6$

等号が成り立つのは，$x+2=\frac{16}{x+2}$ のときである。

このとき　$(x+2)^2=16$　　$x+2>0$ であるから　$x=2$

したがって　$x=2$ のとき最小値 6

(2)　$(3x+2y)\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{y}\right)=9+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}+4=13+6\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

$x>0$，$y>0$ より，$\frac{x}{y}>0$，$\frac{y}{x}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=2$

よって　$13+6\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geqq 13+6\cdot 2=25$

等号が成り立つのは，$\frac{x}{y}=\frac{y}{x}$ のときである。

このとき　$x^2=y^2$　　$x>0$，$y>0$ であるから　$x=y$

したがって　$x=y$ のとき最小値 25

5．(1)　$a>0$ のとき，$a-2+\frac{2}{a+1}$ の最小値を求めよ。

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，$(2a+3b)\left(\frac{8}{a}+\frac{3}{b}\right)$ の最小値を求めよ。

解答　(1)　$a=\sqrt{2}-1$ のとき最小値 $2\sqrt{2}-3$　　(2)　$a=2b$ のとき最小値 49

解説

(1)　$a-2+\frac{2}{a+1}=a+1+\frac{2}{a+1}-3$

$a>0$ より，$a+1>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$a+1+\frac{2}{a+1}\geqq 2\sqrt{(a+1)\cdot\frac{2}{a+1}}=2\sqrt{2}$

よって　$a-2+\frac{2}{a+1}\geqq 2\sqrt{2}-3$

等号が成り立つのは，$a+1=\frac{2}{a+1}$ のときである。

このとき　$(a+1)^2=2$　　$a+1>0$ であるから　$a=\sqrt{2}-1$

したがって　$a=\sqrt{2}-1$ のとき最小値 $2\sqrt{2}-3$

(2)　$(2a+3b)\left(\frac{8}{a}+\frac{3}{b}\right)=25+\frac{24b}{a}+\frac{6a}{b}$

$a>0$，$b>0$ より，$\frac{24b}{a}>0$，$\frac{6a}{b}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$\frac{24b}{a}+\frac{6a}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{24b}{a}\cdot\frac{6a}{b}}=24$

よって　$25+\frac{24b}{a}+\frac{6a}{b}\geqq 25+24=49$

等号が成り立つのは，$\frac{24b}{a}=\frac{6a}{b}$ のときである。

このとき　$a^2=4b^2$　　$a>0$，$b>0$ であるから　$a=2b$

したがって　$a=2b$ のとき最小値 49

6．(1)　実数 a，b が $a>0$，$b>0$，$ab=6$ を満たすとき，$3a+8b$ の最小値は $\boxed{}$ である。

(2)　$x^2+2x+\frac{2}{x}-\frac{2}{x+2}+2$ は，$x=$ ア $\boxed{}$ のとき，最小値 イ $\boxed{}$ をとる。ただし，$x>0$ とする。

(3)　$x>0$，$y>0$，$z>0$ とする。$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{1}{4}$ のとき，$x+2y+3z$ の最小値を求めよ。

解答　(1)　24　(2)　(ア)　$-1+\sqrt{3}$　　(イ)　6

(3)　$x=y=z=24$ のとき最小値 144

解説

(1)　$3a>0$，$8b>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$3a+8b\geqq 2\sqrt{3a\cdot 8b}=4\sqrt{6ab}=4\sqrt{6\cdot 6}=24$

等号は，$3a=8b$ かつ $ab=6$，すなわち $a=4$，$b=\frac{3}{2}$ のとき成り立つ。

よって，$3a+8b$ の最小値は　24

別解　$a \fallingdotseq 0$ であるから，$ab=6$ より　$b=\dfrac{6}{a}$

よって　$3a+8b=3a+\dfrac{48}{a}$

$3a>0$，$\dfrac{48}{a}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$3a+\frac{48}{a} \geqq 2\sqrt{3a\cdot\frac{48}{a}}=24$$

等号は，$3a=\dfrac{48}{a}$ すなわち $a=4$ のとき成り立つ。

よって，$3a+8b$ の最小値は　24

(2)　$x^2+2x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x+2}+2=x(x+2)+\dfrac{2\{(x+2)-x\}}{x(x+2)}+2$

$$=x(x+2)+\frac{4}{x(x+2)}+2$$

$x>0$ より，$x(x+2)>0$，$\dfrac{4}{x(x+2)}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$x(x+2)+\frac{4}{x(x+2)}+2 \geqq 2\sqrt{x(x+2)\cdot\frac{4}{x(x+2)}}+2=6$$

等号が成り立つのは，$x(x+2)=\dfrac{4}{x(x+2)}$ すなわち $x^2(x+2)^2=4$ かつ $x>0$ のときである。

$x^2(x+2)^2=4$ から　$(x^2+2x)^2-4=0$

ゆえに　$(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=0$

$x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ であるから　$x^2+2x-2=0$

よって　$x=-1\pm\sqrt{3}$　　$x>0$ から　$x=-1+\sqrt{3}$

したがって，$x={}^{ア}-1+\sqrt{3}$ のとき最小値 ${}^{イ}6$ をとる。

(3)　$(x+2y+3z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}\right)=14+2\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)+6\left(\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}\right)+3\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right)$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{4}$ から　$x+2y+3z=4\left\{14+2\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)+6\left(\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}\right)+3\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right)\right\}$

$x>0$，$y>0$，$z>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=2,\quad \frac{z}{y}+\frac{y}{z}\geqq 2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}=2,\quad \frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geqq 2\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}=2$$

この 3 つの不等式の等号は，それぞれ $\dfrac{y}{x}=\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{z}{y}=\dfrac{y}{z}$，$\dfrac{x}{z}=\dfrac{z}{x}$ のとき成立するから，$x=y=z$ のときすべての等号が成立する。

このとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{4}$ から　$\dfrac{6}{x}=\dfrac{1}{4}$

よって　$x=y=z=24$

したがって，$x+2y+3z$ は，$x=y=z=24$ のとき最小値 $24+2\cdot24+3\cdot24=144$ をとる。

別解　$x>0$，$y>0$，$z>0$ であるから，コーシー・シュワルツの不等式により

$$\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{2y})^2+(\sqrt{3z})^2\}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{x}}\right)^2\right\}$$

$$\geqq\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{2y}\cdot\sqrt{\frac{2}{y}}+\sqrt{3z}\cdot\sqrt{\frac{3}{z}}\right)^2$$

すなわち　$(x+2y+3z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}\right)\geqq(1+2+3)^2$

よって　$(x+2y+3z)\cdot\dfrac{1}{4}\geqq 6^2$

ゆえに　$x+2y+3z\geqq 144$

等号は，$\sqrt{x}:\sqrt{2y}:\sqrt{3z}=\sqrt{\dfrac{1}{x}}:\sqrt{\dfrac{2}{y}}:\sqrt{\dfrac{3}{z}}$　かつ　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{4}$

すなわち，$x=y=z=24$ のとき成り立つ。

したがって，求める最小値は　144

7．$x>0$ のとき，$\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$ の最大値を求めよ。

解答　$x=\sqrt{2}-1$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解説

$$\frac{x+1}{x^2+2x+3}=\frac{1}{\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}}=\frac{1}{x+1+\dfrac{2}{x+1}}$$

$x>0$ であるから，$\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$ が最大となるのは，$x+1+\dfrac{2}{x+1}$ が最小となるときである。$x>0$ のとき $x+1>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$x+1+\frac{2}{x+1}\geqq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{2}{x+1}}=2\sqrt{2}$$

等号が成り立つのは，$x+1=\dfrac{2}{x+1}$ のときである。

このとき　$(x+1)^2=2$　　$x+1>0$ であるから　$x+1=\sqrt{2}$

したがって，$x=\sqrt{2}-1$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ をとる。