数学演習（不等式の証明）Ｈ２９．４．１５　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

1．次のことを証明せよ。

(1)　$a \geqq b$，$x \geqq y$ のとき　$(a+2b)(x+2y) \leqq 3(ax+2by)$

(2)　$2a > b > 0$ のとき　$\dfrac{b}{a} < \dfrac{b+2}{a+1}$

(3)　$x \geqq y \geqq z$ のとき　$xy + yz \geqq zx + y^2$

2．次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$x^2 - 6xy + 10y^2 \geqq 4y - 4$

(2)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

3．次の不等式が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき　$5\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \geqq \sqrt{25a+9b}$

(2)　$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき　$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqq \sqrt{2(a+b)}$

4．次の不等式を証明せよ。

(1)　$|a+b| \leqq |a|+|b|$

(2)　$|a|-|b| \leqq |a+b|$

(3)　$|a+b+c| \leqq |a|+|b|+|c|$

5．次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$a \geqq b$，$x \geqq y$ のとき　$(a+b)(x+y) \leqq 2(ax+by)$

(2)　$a \geqq b \geqq c$，$x \geqq y \geqq z$ のとき　$(a+b+c)(x+y+z) \leqq 3(ax+by+cz)$

6．$a>0$，$b>0$，$a \fallingdotseq b$ のとき，$\dfrac{a+b}{2}$，$\sqrt{ab}$，$\dfrac{2ab}{a+b}$，$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ の大小を比較せよ。

1. 次のことを証明せよ。

(1) $a \geqq b$，$x \geqq y$ のとき　$(a+2b)(x+2y) \leqq 3(ax+2by)$

(2) $2a > b > 0$ のとき　$\dfrac{b}{a} < \dfrac{b+2}{a+1}$

(3) $x \geqq y \geqq z$ のとき　$xy+yz \geqq zx+y^2$

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略

解説

(1) $3(ax+2by)-(a+2b)(x+2y)=3ax+6by-(ax+2ay+2bx+4by)$

$=2(ax-ay-bx+by)$

$=2(a-b)(x-y)$

$a \geqq b$，$x \geqq y$ より $a-b \geqq 0$，$x-y \geqq 0$ であるから　$2(a-b)(x-y) \geqq 0$

したがって　$(a+2b)(x+2y) \leqq 3(ax+2by)$

参考　等号が成り立つのは　$a-b=0$ または $x-y=0$

すなわち，$a=b$ または $x=y$ のときである。

(2) $\dfrac{b+2}{a+1}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{a(b+2)-b(a+1)}{a(a+1)}=\dfrac{2a-b}{a(a+1)}$

$2a>b>0$ より，$2a-b>0$ であるから　$\dfrac{2a-b}{a(a+1)}>0$

したがって　$\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+2}{a+1}$

(3) $xy+yz-(zx+y^2)=x(y-z)-y(y-z)=(x-y)(y-z)$

$x \geqq y \geqq z$ より，$x-y \geqq 0$，$y-z \geqq 0$ であるから　$(x-y)(y-z) \geqq 0$

したがって　$xy+yz \geqq zx+y^2$

参考　等号が成り立つのは　$x-y=0$ または $y-z=0$

すなわち，$x=y$ または $y=z$ のときである。

2. 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $x^2-6xy+10y^2 \geqq 4y-4$　　(2) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

解答　(1)　証明略，$x=6$，$y=2$　(2)　証明略，$ay=bx$

解説

(1) $(x^2-6xy+10y^2)-(4y-4)=x^2-6yx+10y^2-4y+4$

$=\{x^2-6yx+(3y)^2\}-(3y)^2+10y^2-4y+4$

$=(x-3y)^2+y^2-4y+4$

$=(x-3y)^2+(y-2)^2 \geqq 0$

ゆえに　$x^2-6xy+10y^2 \geqq 4y-4$

等号が成り立つのは，$x-3y=0$ かつ $y-2=0$ すなわち $x=6$，$y=2$ のときである。

(2) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=(a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2)-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2 \geqq 0$

ゆえに　$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

等号が成り立つのは，$ay=bx$ のときである。

3. 次の不等式が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき　$5\sqrt{a}+3\sqrt{b} \geqq \sqrt{25a+9b}$

(2) $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき　$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqq \sqrt{2(a+b)}$

解答　(1)　証明略，$a=0$ または $b=0$　(2)　証明略，$a=b$

解説

(1) $(5\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2-(\sqrt{25a+9b})^2=(25a+30\sqrt{a}\sqrt{b}+9b)-(25a+9b)$

$=30\sqrt{a}\sqrt{b}=30\sqrt{ab} \geqq 0$　…… ①

よって　$(5\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2 \geqq (\sqrt{25a+9b})^2$

$5\sqrt{a}+3\sqrt{b} \geqq 0$，$\sqrt{25a+9b} \geqq 0$ であるから　$5\sqrt{a}+3\sqrt{b} \geqq \sqrt{25a+9b}$

等号が成り立つのは，① から $a=0$ または $b=0$ のときである。

(2) $\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=2(a+b)-(a+2\sqrt{ab}+b)$

$=a-2\sqrt{ab}+b$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$　…… ①

よって　$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2 \geqq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\sqrt{2(a+b)} \geqq 0$，$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqq 0$ であるから　$\sqrt{2(a+b)} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

等号が成り立つのは，① から $a=b$ のときである。

4. 次の不等式を証明せよ。

(1)　$|a+b| \leqq |a|+|b|$　　(2)　$|a|-|b| \leqq |a+b|$

(3)　$|a+b+c| \leqq |a|+|b|+|c|$

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略

解説

(1)　$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2=a^2+2|a||b|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(|ab|-ab) \geqq 0$

よって　$|a+b|^2 \leqq (|a|+|b|)^2$

$|a+b| \geqq 0$，$|a|+|b| \geqq 0$ から　$|a+b| \leqq |a|+|b|$

別解　一般に，$-|a| \leqq a \leqq |a|$，$-|b| \leqq b \leqq |b|$ が成り立つ。

この不等式の辺々を加えて　$-(|a|+|b|) \leqq a+b \leqq |a|+|b|$

したがって　$|a+b| \leqq |a|+|b|$

(2)　(1) の不等式で a の代わりに $a+b$，b の代わりに $-b$ とおくと

$|(a+b)+(-b)| \leqq |a+b|+|-b|$

よって　$|a| \leqq |a+b|+|b|$　　ゆえに　$|a|-|b| \leqq |a+b|$

別解　[1]　$|a|-|b|<0$ のとき

$|a+b| \geqq 0$ であるから，$|a|-|b|<|a+b|$ は成り立つ。

[2]　$|a|-|b| \geqq 0$ のとき

$|a+b|^2-(|a|-|b|)^2=a^2+2ab+b^2-(a^2-2|a||b|+b^2)$

$=2(ab+|ab|) \geqq 0$

よって　$(|a|-|b|)^2 \leqq |a+b|^2$

$|a|-|b| \geqq 0$，$|a+b| \geqq 0$ であるから　$|a|-|b| \leqq |a+b|$

[1]，[2] から　$|a|-|b| \leqq |a+b|$

(3)　(1) の不等式で b の代わりに $b+c$ とおくと

$|a+(b+c)| \leqq |a|+|b+c| \leqq |a|+|b|+|c|$

よって　$|a+b+c| \leqq |a|+|b|+|c|$

5. 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$a \geqq b$，$x \geqq y$ のとき　$(a+b)(x+y) \leqq 2(ax+by)$

(2)　$a \geqq b \geqq c$，$x \geqq y \geqq z$ のとき　$(a+b+c)(x+y+z) \leqq 3(ax+by+cz)$

解答　(1)　略　(2)　略

解説

(1)　$a \geqq b$，$x \geqq y$ であるから

$2(ax+by)-(a+b)(x+y)=ax+by-ay-bx$

$=a(x-y)-b(x-y)$

$=(a-b)(x-y) \geqq 0$

よって　$2(ax+by) \geqq (a+b)(x+y)$　……①

(2)　(1) と同様にして，$a \geqq b \geqq c$，$x \geqq y \geqq z$ であるから

$b \geqq c$，$y \geqq z$ から　$2(by+cz) \geqq (b+c)(y+z)$　……②

$a \geqq c$，$x \geqq z$ から　$2(ax+cz) \geqq (a+c)(x+z)$　……③

①，②，③ の辺々を加えて

$2(ax+by)+2(by+cz)+2(ax+cz)$

$\geqq (a+b)(x+y)+(b+c)(y+z)+(a+c)(x+z)$

$=(a+b)(x+y)+b(y+z)+c(y+z)+a(x+z)+c(x+z)$

$=(a+b)(x+y)+(a+b)z+c(x+y+z)+(ax+by+cz)$

$=(a+b)(x+y+z)+c(x+y+z)+(ax+by+cz)$

$=(a+b+c)(x+y+z)+(ax+by+cz)$

よって　$4(ax+by+cz) \geqq (a+b+c)(x+y+z)+(ax+by+cz)$

すなわち　$(a+b+c)(x+y+z) \leqq 3(ax+by+cz)$

6. $a>0$，$b>0$，$a \fallingdotseq b$ のとき，$\dfrac{a+b}{2}$，$\sqrt{ab}$，$\dfrac{2ab}{a+b}$，$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ の大小を比較せよ。

解答　$\dfrac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}<\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

解説

$\sqrt{ab}-\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{\sqrt{ab}(a+b)-2ab}{a+b}=\dfrac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$

$=\dfrac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}>0$

よって　$\sqrt{ab}>\dfrac{2ab}{a+b}$　……①

$a \fallingdotseq b$ と (相加平均)$\geqq$(相乗平均) により　$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$　……②

$\left(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\right)^2-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{(a+b)^2}{4}=\dfrac{(a-b)^2}{4}>0$

$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}>0$，$\dfrac{a+b}{2}>0$ から　$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}>\dfrac{a+b}{2}$　……③

①～③ から　$\dfrac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}<\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$