数学演習（等式の証明）Ｈ２９．４．１４　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．次の等式を証明せよ。

(1)　$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

(2)　$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a+b+c)^2-6(ab+bc+ca)$

2．$a+b+c=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$a^2+2b^2-c^2+3ab+bc=0$

(2)　$a^3+b^3+c^3=-3(a+b)(b+c)(c+a)$

3．(1)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，等式 $\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\dfrac{ab+cd}{ab-cd}$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ のとき，等式 $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a+c+e}{b+d+f}$ が成り立つことを証明せよ。

4．(1)　$\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{y+z}{6}=\dfrac{z+x}{7}\ (\fallingdotseq 0)$ のとき，$\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ の値を求めよ。

(2)　$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$ のとき，この式の値を求めよ。

5．a，b，c は実数とする。

(1)　$abc=1$，$a+b+c=ab+bc+ca$ のとき，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 1 であることを証明せよ。

(2)　$a+b+c=ab+bc+ca=3$ のとき，a，b，c はすべて 1 であることを証明せよ。

6．x，y，z が $(x+y):(y+z):(z+x)=3:5:4$ かつ $x+y+z=12$ を満たすとき，$xy+yz+zx$ の値を求めよ。

1．次の等式を証明せよ。

(1)　$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

(2)　$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a+b+c)^2-6(ab+bc+ca)$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　(右辺)$=a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4-a^4b-a^3b^2-a^2b^3-ab^4-b^5$

$=a^5-b^5$

よって，等式は証明された。

(2)　(左辺)$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2$

$=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$

(右辺)$=2(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)-6(ab+bc+ca)$

$=2a^2+2b^2+2c^2+4ab+4bc+4ca-6ab-6bc-6ca$

$=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$　……(*)

左辺と右辺が同じ式になるから，等式は証明された。

別解　[右辺を変形して，左辺を導く]

上の解答の (*) の変形の後

(右辺)$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=$(左辺)

2．$a+b+c=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$a^2+2b^2-c^2+3ab+bc=0$

(2)　$a^3+b^3+c^3=-3(a+b)(b+c)(c+a)$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ であるから

$a^2+2b^2-c^2+3ab+bc=a^2+2b^2-(a+b)^2+3ab-b(a+b)$

$=a^2+2b^2-(a^2+2ab+b^2)+3ab-ab-b^2$

$=0$

(2)　$a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ であるから

$a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

$=a^3+b^3-(a+b)^3+3(a+b)(b-a-b)(-a-b+a)$

$=a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+3ab(a+b)$

$=-3a^2b-3ab^2+3a^2b+3ab^2=0$

したがって　$a^3+b^3+c^3=-3(a+b)(b+c)(c+a)$

3．(1)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，等式 $\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\dfrac{ab+cd}{ab-cd}$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ のとき，等式 $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a+c+e}{b+d+f}$ が成り立つことを証明せよ。

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk,\ c=dk$

ゆえに　$\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\dfrac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2k^2-d^2k^2}=\dfrac{k^2(b^2+d^2)}{k^2(b^2-d^2)}=\dfrac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

$\dfrac{ab+cd}{ab-cd}=\dfrac{b^2k+d^2k}{b^2k-d^2k}=\dfrac{k(b^2+d^2)}{k(b^2-d^2)}=\dfrac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

よって　$\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\dfrac{ab+cd}{ab-cd}$

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=k$ とおくと　$a=bk,\ c=dk,\ e=fk$

ゆえに　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{bk+dk}{b+d}=\dfrac{k(b+d)}{b+d}=k$

$\dfrac{a+c+e}{b+d+f}=\dfrac{bk+dk+fk}{b+d+f}=\dfrac{k(b+d+f)}{b+d+f}=k$

よって　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a+c+e}{b+d+f}$

4．(1)　$\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{y+z}{6}=\dfrac{z+x}{7}\ (\fallingdotseq 0)$ のとき，$\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ の値を求めよ。

(2)　$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$ のとき，この式の値を求めよ。

解答　(1)　$\dfrac{26}{29}$　　(2)　-1，2

解説

(1)　$\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{y+z}{6}=\dfrac{z+x}{7}=k$ とおくと，$k\fallingdotseq 0$ で

$x+y=5k$ ……①，$y+z=6k$ ……②，$z+x=7k$ ……③

①+②+③ から　　$2(x+y+z)=18k$

したがって　　$x+y+z=9k$　……④

④−②，④−③，④−① から，それぞれ

$x=3k$，　$y=2k$，　$z=4k$

よって　　$\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{6k^2+8k^2+12k^2}{(3k)^2+(2k)^2+(4k)^2}=\dfrac{26k^2}{29k^2}=\dfrac{26}{29}$

(2)　分母は 0 でないから　　$abc\fallingdotseq 0$

$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}=k$ とおくと

$b+c=ak$ ……①，$c+a=bk$ ……②，$a+b=ck$ ……③

①+②+③ から　　$2(a+b+c)=(a+b+c)k$

よって　　$(a+b+c)(k-2)=0$

ゆえに　　$a+b+c=0$　または　$k=2$

[1]　$a+b+c=0$ のとき　　$b+c=-a$

よって　　$k=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{-a}{a}=-1$

[2]　$k=2$ のとき，①−② から　　$a=b$　　　②−③ から　　$b=c$

よって，$a=b=c$ が得られ，これは $abc\fallingdotseq 0$ を満たすすべての実数 a，b，c について成り立つ。

[1]，[2] から，求める式の値は　　-1，2

5．a，b，c は実数とする。

(1)　$abc=1$，$a+b+c=ab+bc+ca$ のとき，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 1 であることを証明せよ。

(2)　$a+b+c=ab+bc+ca=3$ のとき，a，b，c はすべて 1 であることを証明せよ。

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$P=(a-1)(b-1)(c-1)$ とすると

$P=abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1$

$abc=1$ と $a+b+c=ab+bc+ca$ を代入すると

$P=1-(a+b+c)+(a+b+c)-1=0$

よって　　$a-1=0$ または $b-1=0$ または $c-1=0$

したがって，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 1 である。

(2)　$Q=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2$ とすると

$Q=a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)+3$

ここで，$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ であるから

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=3^2-2\cdot 3=3$

ゆえに　　$Q=3-2\cdot 3+3=0$

よって　　$a-1=0$ かつ $b-1=0$ かつ $c-1=0$

したがって，a，b，c はすべて 1 である。

6．x，y，z が $(x+y):(y+z):(z+x)=3:5:4$ かつ $x+y+z=12$ を満たすとき，$xy+yz+zx$ の値を求めよ。

解答　44

解説

$(x+y):(y+z):(z+x)=3:5:4$ から，$k\fallingdotseq 0$ として，

$x+y=3k$ ……①，$y+z=5k$ ……②，$z+x=4k$ ……③

とおくことができる。

①+②+③ から　　$2(x+y+z)=12k$

よって　　$x+y+z=6k$　……④

$x+y+z=12$ であるから　　$6k=12$　　ゆえに　　$k=2$

④−②，④−③，④−① から，それぞれ　　$x=k$，$y=2k$，$z=3k$

$k=2$ を代入して　　$x=2$，$y=4$，$z=6$

したがって　　$xy+yz+zx=2\cdot 4+4\cdot 6+6\cdot 2=44$