数学演習（恒等式）Ｈ２９．４．１３　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

$$-2x^3+8x^2+ax+b+10=(2x^2+3)(cx+d)$$

２．次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$$ax(x+1)+bx(x-3)-c(x-3)(x+1)=6x^2+7x+21$$

３．次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$$\frac{-2x^2+6}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{a}{x+1}-\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

４．次の等式が x，y についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$$x^2+xy-12y^2-3x+23y+a=(x-3y+b)(x+4y+c)$$

５．(1)　x の整式 $2x^3+ax^2+x+1$ を整式 x^2+x+1 で割ると，商が $bx-1$，余りが R であった。このとき，定数 a，b の値と R を求めよ。ただし，R は x の整式または定数であるとする。

(2)　x の整式 x^3-x^2+ax+b が整式 x^2+x+1 で割り切れて，商が x の整式 Q であるという。このとき，定数 a，b の値と Q を求めよ。

6．$x+y-z=0$，$2x-2y+z+1=0$ を満たす x，y，z のすべての値に対して $ax^2+by^2+cz^2=1$ が成り立つという。

(1) y，z を x の式で表せ。

(2) 定数 a，b，c の値を求めよ。

7．(1) $x^4-4x^3+ax^2+x+b$ が，ある整式の平方となるような定数 a，b の値を求めよ。

(2) $\dfrac{2x^3-7x^2+11x-16}{x(x-2)^3}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{(x-2)^2}+\dfrac{d}{(x-2)^3}$ が x についての恒等式となるように定数 a，b，c，d の値を定めると，$a=$ ア $\boxed{}$，$b=$ イ $\boxed{}$，$c=$ ウ $\boxed{}$，$d=$ エ $\boxed{}$ である。

8．等式 $kx^2+(1-7k)x-(k+1)y+19k+4=0$ がどんな k の値についても成り立つように，x，y の値を定めよ。

1．次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

$$-2x^3+8x^2+ax+b+10=(2x^2+3)(cx+d)$$

解答　$a=-3$，$b=2$，$c=-1$，$d=4$

解説

与式の右辺を展開して整理すると

$$-2x^3+8x^2+ax+b+10=2cx^3+2dx^2+3cx+3d$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$-2=2c,\ 8=2d,\ a=3c,\ b+10=3d$$

この連立方程式を解いて

$$a=-3,\ b=2,\ c=-1,\ d=4$$

2．次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$$ax(x+1)+bx(x-3)-c(x-3)(x+1)=6x^2+7x+21$$

解答　$a=8$，$b=5$，$c=7$

解説

この等式が恒等式ならば，$x=-1$，0，3 を代入しても成り立つ。

$x=-1$ を代入すると　$4b=20$

$x=0$ を代入すると　$3c=21$

$x=3$ を代入すると　$12a=96$

したがって　$b=5$，$c=7$，$a=8$　……①

このとき　(左辺)$=8x(x+1)+5x(x-3)-7(x-3)(x+1)$

$=8(x^2+x)+5(x^2-3x)-7(x^2-2x-3)$

$=6x^2+7x+21$

ゆえに，与式は恒等式である。

よって　$a=8$，$b=5$，$c=7$

3．次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$$\frac{-2x^2+6}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{a}{x+1}-\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

解答　$a=1$，$b=3$，$c=2$

解説

両辺に $(x+1)(x-1)^2$ を掛けて得られる等式

$$-2x^2+6=a(x-1)^2-b(x+1)(x-1)+c(x+1)\quad\cdots\cdots①$$

も x についての恒等式である。

[解答 1]　(右辺)$=a(x^2-2x+1)-b(x^2-1)+cx+c$

$=(a-b)x^2+(-2a+c)x+a+b+c$

よって　$-2x^2+6=(a-b)x^2+(-2a+c)x+a+b+c$

両辺の同じ次数の項の係数は等しいから

$$a-b=-2,\ -2a+c=0,\ a+b+c=6$$

この連立方程式を解いて　$a=1$，$b=3$，$c=2$

[解答 2]　① の両辺に $x=-1$，0，1 を代入すると，それぞれ

$$4=4a,\ 6=a+b+c,\ 4=2c$$

この連立方程式を解いて　$a=1$，$b=3$，$c=2$

このとき，① の両辺は 2 次以下の整式であり，異なる 3 個の x の値に対して成り立つから，① は x についての恒等式である。

したがって　$a=1$，$b=3$，$c=2$

4．次の等式が x，y についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$$x^2+xy-12y^2-3x+23y+a=(x-3y+b)(x+4y+c)$$

解答　$a=-10$，$b=2$，$c=-5$

解説

右辺を展開して整理すると

$$x^2+xy-12y^2-3x+23y+a=x^2+xy-12y^2+(b+c)x+(4b-3c)y+bc$$

これが x，y についての恒等式であるための条件は，両辺の同類項の係数が等しいことであるから

$$b+c=-3\ \cdots\cdots①,\ 4b-3c=23\ \cdots\cdots②,\ a=bc\ \cdots\cdots③$$

①，② から　$b=2$，$c=-5$

このとき，③ から　$a=2\cdot(-5)=-10$

したがって　$a=-10$，$b=2$，$c=-5$

別解　等式が恒等式ならば，$(x,\ y)=(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を代入しても成り立つ。

$(x,\ y)=(0,\ 0)$ を代入すると　$a=bc$　……①

$(x,\ y)=(1,\ 0)$ を代入すると　$-2+a=(b+1)(c+1)$　……②

$(x,\ y)=(0,\ 1)$ を代入すると　$11+a=(b-3)(c+4)$　……③

②，③ に ① を代入して整理すると　$b+c=-3$，$4b-3c=23$

これを解いて　$b=2$，$c=-5$　　よって，① から　$a=-10$

逆に，このとき　(左辺)$=x^2+xy-12y^2-3x+23y-10$

(右辺)$=(x-3y+2)(x+4y-5)=x^2+xy-12y^2-3x+23y-10$

ゆえに，与式は恒等式である。よって　$a=-10$，$b=2$，$c=-5$

5．(1)　x の整式 $2x^3+ax^2+x+1$ を整式 x^2+x+1 で割ると，商が $bx-1$，余りが R であった。このとき，定数 a，b の値と R を求めよ。ただし，R は x の整式または定数であるとする。

(2)　x の整式 x^3-x^2+ax+b が整式 x^2+x+1 で割り切れて，商が x の整式 Q であるという。このとき，定数 a，b の値と Q を求めよ。

解答　(1)　$a=1$，$b=2$，$R=2$　　(2)　$a=-1$，$b=-2$，$Q=x-2$

解説

(1)　2 次式 x^2+x+1 で割ったときの余り R を $R=cx+d$ とすると，条件から，次の等式が成り立つ。

$$2x^3+ax^2+x+1=(x^2+x+1)(bx-1)+cx+d$$

この等式は x についての恒等式である。

右辺を x について整理すると

$$2x^3+ax^2+x+1=bx^3+(b-1)x^2+(b+c-1)x-1+d$$

両辺の同じ次数の項の係数は等しいから

$$2=b,\ a=b-1,\ 1=b+c-1,\ 1=-1+d$$

この連立方程式を解いて　$a=1$，$b=2$，$c=0$，$d=2$

したがって　$a=1$，$b=2$，$R=2$

(2)　2 次式 x^2+x+1 で割ったときの商を $Q=cx+d$ とすると，

$$x^3-x^2+ax+b=(x^2+x+1)(cx+d)$$

は x についての恒等式である。

右辺を展開して整理すると

$$x^3-x^2+ax+b=cx^3+(c+d)x^2+(c+d)x+d$$

両辺の同じ次数の項の係数は等しいから

$$1=c,\ -1=c+d,\ a=c+d,\ b=d$$

この連立方程式を解いて　$a=-1$，$b=-2$，$c=1$，$d=-2$

したがって　$a=-1$，$b=-2$，$Q=x-2$

別解　x^3-x^2+ax+b を x^2+x+1 で割ったときの商と余りは，右の計算により

商 $x-2$，余り $(a+1)x+b+2$

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline x^2+x+1 & x^3-x^2+ax+b \\ & x^3+x^2+x \\ \hline & -2x^2+(a-1)x+b \\ & -2x^2-2x-2 \\ \hline & (a+1)x+b+2 \end{array}$$

余りが 0 になるとき，$(a+1)x+b+2=0$ が x についての恒等式であるから

$$a+1=0,\ b+2=0$$

よって　$a=-1$，$b=-2$，$Q=x-2$

6．$x+y-z=0$，$2x-2y+z+1=0$ を満たす x，y，z のすべての値に対して $ax^2+by^2+cz^2=1$ が成り立つという。

(1)　y，z を x の式で表せ。　　(2)　定数 a，b，c の値を求めよ。

解答　(1)　$y=3x+1$，$z=4x+1$　　(2)　$a=12$，$b=4$，$c=-3$

解説

(1)　$x+y-z=0$ …… ①，$2x-2y+z+1=0$ …… ② とする。

①＋② から　$3x-y+1=0$

したがって　$y=3x+1$

①×2＋② から　$4x-z+1=0$

したがって　$z=4x+1$

(2)　(1) の結果を $ax^2+by^2+cz^2=1$ に代入すると

$$ax^2+b(3x+1)^2+c(4x+1)^2=1$$

展開して x について整理すると

$$(a+9b+16c)x^2+(6b+8c)x+b+c-1=0$$

これが x についての恒等式であるから

$$a+9b+16c=0,\ 6b+8c=0,\ b+c-1=0$$

この連立方程式を解いて　$a=12$，$b=4$，$c=-3$

7．(1)　$x^4-4x^3+ax^2+x+b$ が，ある整式の平方となるような定数 a，b の値を求めよ。

(2)　$\dfrac{2x^3-7x^2+11x-16}{x(x-2)^3}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{(x-2)^2}+\dfrac{d}{(x-2)^3}$ が x についての恒等式となるように定数 a，b，c，d の値を定めると，$a=$ ア$\boxed{}$，$b=$ イ$\boxed{}$，$c=$ ウ$\boxed{}$，$d=$ エ$\boxed{}$ である。

解答　(1)　$a=\dfrac{7}{2}$，$b=\dfrac{1}{16}$　　(2)　(ア)　2　　(イ)　0　　(ウ)　5　　(エ)　-3

解説

(1)　$x^4-4x^3+ax^2+x+b=(x^2+px+q)^2$ とする。

右辺を展開して整理すると

$$x^4-4x^3+ax^2+x+b=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$$

両辺の係数を比較すると

$-4=2p$ …… ①，　$a=p^2+2q$ …… ②，

$1=2pq$ …… ③，　$b=q^2$ …… ④

① から　$p=-2$　　③ に代入して　$-4q=1$

ゆえに　$q=-\dfrac{1}{4}$　　④ に代入して　$b=\dfrac{1}{16}$

② に $p=-2$，$q=-\dfrac{1}{4}$ を代入して　$a=\dfrac{7}{2}$

(2)　両辺に $x(x-2)^3$ を掛けて得られる等式

$$2x^3-7x^2+11x-16=a(x-2)^3+bx(x-2)^2+cx(x-2)+dx$$

も x についての恒等式である。

右辺を展開し，x について整理すると

$$2x^3-7x^2+11x-16=(a+b)x^3+(-6a-4b+c)x^2+(12a+4b-2c+d)x-8a$$

両辺の同じ次数の項の係数は等しいから

$a+b=2$ …… ①，　$-6a-4b+c=-7$ …… ②，

$12a+4b-2c+d=11$ …… ③，　$-8a=-16$ …… ④

④ から　$a=$ ア2　　① から　$b=2-2=$ イ0

② から　$c=-7+6\cdot2+4\cdot0=$ ウ5

③ から　$d=11-12\cdot2-4\cdot0+2\cdot5=$ エ-3

8．等式 $kx^2+(1-7k)x-(k+1)y+19k+4=0$ がどんな k の値についても成り立つように，x，y の値を定めよ。

解答　$(x,\ y)=(3,\ 7)$，$(5,\ 9)$

解説

与えられた等式を k について整理すると

$$(x^2-7x-y+19)k+(x-y+4)=0$$

これがどんな k の値についても成り立つための条件は

$x^2-7x-y+19=0$ …… ①，$x-y+4=0$ …… ②

② から　$y=x+4$ …… ③

③ を ① に代入して整理すると　$x^2-8x+15=0$

ゆえに　$(x-3)(x-5)=0$　　よって　$x=3$，5

③ から　$x=3$ のとき　$y=7$，　$x=5$ のとき　$y=9$

したがって　$(x,\ y)=(3,\ 7)$，$(5,\ 9)$