数学演習（二項定理•多項定理）Ｈ２９．４．１０　　(　)組(　)番　名前(　)

１. $(2x-3)^5$ の展開式を求めよ。

２. $(a-2b)^6$ の展開式で，a^5b の項の係数は ア$\boxed{}$，a^2b^4 の項の係数は イ$\boxed{}$ である。

また，$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^6$ の展開式で，x^6 の項の係数は ウ$\boxed{}$，定数項は エ$\boxed{}$ である。

３. 次の式の展開式における，[　]内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $(x+2y+3z)^4$　[x^2yz]

(2) $(1+x+x^2)^8$　[x^4]

４. $\left(x+\dfrac{1}{x^2}+1\right)^5$ の展開式における定数項を求めよ。

５. 次の展開式における，[　]内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $\left(x^2-x^3-\dfrac{3}{x}\right)^5$　[x^7]

(2) $\left(a+b+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^7$　[ab^2]

6．(1)　次の数の下位 5 桁を求めよ。

(ア)　101^{100}　　　(イ)　99^{100}

(2)　29^{51} を 900 で割ったときの余りを求めよ。

7．(1)　$(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ の展開式を利用して，等式

$${}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n{}^2={}_{2n}\mathrm{C}_n$$

が成り立つことを証明せよ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，等式 ${}_n\mathrm{C}_1+2{}_n\mathrm{C}_2+3{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n{}_n\mathrm{C}_n=n\cdot 2^{n-1}$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ を展開したとき，すべての項の係数の和は $\boxed{}$ である。

8．$(x+5)^{80}$ を展開したとき，x の何乗の係数が最大になるか答えよ。

数学演習（二項定理･多項定理）Ｈ２９．４．１０　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．$(2x-3)^5$ の展開式を求めよ。

解答　$32x^5-240x^4+720x^3-1080x^2+810x-243$

解説

二項定理から

$$(2x-3)^5={}_5C_0(2x)^5+{}_5C_1(2x)^4(-3)+{}_5C_2(2x)^3(-3)^2+{}_5C_3(2x)^2(-3)^3+{}_5C_4(2x)(-3)^4+{}_5C_5(-3)^5$$
$$=32x^5-240x^4+720x^3-1080x^2+810x-243$$

別解　パスカルの三角形から

$$(2x-3)^5=1\times(2x)^5+5\times(2x)^4(-3)+10\times(2x)^3(-3)^2+10\times(2x)^2(-3)^3+5\times(2x)(-3)^4+1\times(-3)^5$$
$$=32x^5-240x^4+720x^3-1080x^2+810x-243$$

1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1

2．$(a-2b)^6$ の展開式で，a^5b の項の係数は ア□，a^2b^4 の項の係数は イ□ である。

また，$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$ の展開式で，x^6 の項の係数は ウ□，定数項は エ□ である。

解答　(ア)　-12　　(イ)　240　　(ウ)　60　　(エ)　240

解説

$(a-2b)^6$ の展開式の一般項は　${}_6C_ra^{6-r}(-2b)^r={}_6C_r(-2)^ra^{6-r}b^r$

a^5b の項は $r=1$ のときで，その係数は　${}_6C_1(-2)=$ ア-12

a^2b^4 の項は $r=4$ のときで，その係数は　${}_6C_4(-2)^4=$ イ240

また，$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6C_r(x^2)^{6-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_6C_r(-2)^r\cdot\frac{x^{12-2r}}{x^r}={}_6C_r(-2)^r\cdot x^{12-2r-r}$$
$$={}_6C_r(-2)^r\cdot x^{12-3r}\quad\cdots\cdots ①$$

x^6 の項は，$12-3r=6$ より $r=2$ のときである。

その係数は，① から　${}_6C_2(-2)^2=$ ウ60

定数項は，$12-3r=0$ より $r=4$ のときである。

したがって，① から　${}_6C_4(-2)^4=$ エ240

3．次の式の展開式における，[　]内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(x+2y+3z)^4$　[x^2yz]　　　(2)　$(1+x+x^2)^8$　[x^4]

解答　(1)　72　　(2)　266

解説

(1)　$(x+2y+3z)^4$ の展開式の一般項は

$$\frac{4!}{p!q!r!}x^p(2y)^q(3z)^r=\left(\frac{4!}{p!q!r!}\cdot2^q\cdot3^r\right)x^py^qz^r$$

ただし　$p+q+r=4$，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

x^2yz の項は，$p=2$，$q=1$，$r=1$ のときであるから　$\frac{4!}{2!1!1!}\cdot2\cdot3=72$

別解　$\{(x+2y)+3z\}^4$ の展開式において，z を含む項は

$${}_4C_1(x+2y)^3\cdot3z=12(x+2y)^3z$$

また，$(x+2y)^3$ の展開式において，x^2y を含む項は

$${}_3C_1x^2\cdot2y=6x^2y$$

よって，x^2yz の項の係数は　$12\times6=72$

(2)　$(1+x+x^2)^8$ の展開式の一般項は

$$\frac{8!}{p!q!r!}\cdot1^p\cdot x^q\cdot(x^2)^r=\frac{8!}{p!q!r!}\cdot x^{q+2r}$$

ただし　$p+q+r=8$ …… ①，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

x^4 の項は，　$q+2r=4$　すなわち　$q=4-2r$　…… ②

のときであり，①，② から　$p=r+4$　…… ③

ここで，② と $q\geqq0$ から　$4-2r\geqq0$

r は 0 以上の整数であるから　$r=0,\ 1,\ 2$

②，③ から　$r=0$ のとき　$p=4,\ q=4$

$r=1$ のとき　$p=5,\ q=2$

$r=2$ のとき　$p=6,\ q=0$

よって，求める係数は　$\frac{8!}{4!4!0!}+\frac{8!}{5!2!1!}+\frac{8!}{6!0!2!}=70+168+28=266$

別解　$(1+x+x^2)^8=\{(1+x)+x^2\}^8=(1+x)^8+{}_8C_1(1+x)^7x^2+{}_8C_2(1+x)^6(x^2)^2+\cdots\cdots$

この展開式の中で，x^4 を含む項は　${}_8C_4x^4$，${}_8C_1\cdot{}_7C_2x^2\cdot x^2$，${}_8C_2\cdot1\cdot x^4$

よって，求める係数は　${}_8C_4+{}_8C_1\cdot{}_7C_2+{}_8C_2=70+8\cdot21+28=266$

4．$\left(x+\frac{1}{x^2}+1\right)^5$ の展開式における定数項を求めよ。

解答　31

解説

展開式の一般項は

$$\frac{5!}{p!q!r!}x^p\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^q\cdot1^r=\frac{5!}{p!q!r!}x^p\cdot\frac{1}{x^{2q}}\cdot1=\frac{5!}{p!q!r!}x^{p-2q}$$

ただし　$p+q+r=5$ …… ①，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

定数項は，$p-2q=0$ のときである。

$p-2q=0$ から　$p=2q$ …… ②

これを ① に代入して　$3q+r=5$　　ゆえに　$r=5-3q$

$r\geqq0$ であるから　$5-3q\geqq0$

q は 0 以上の整数であるから　$q=0,\ 1$

$q=0$ のとき　$r=5$　　$q=1$ のとき　$r=2$

よって，② から　$(p,\ q,\ r)=(0,\ 0,\ 5),\ (2,\ 1,\ 2)$

したがって，定数項は　$\frac{5!}{0!0!5!}+\frac{5!}{2!1!2!}=1+30=31$

5．次の展開式における，[　]内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$\left(x^2-x^3-\frac{3}{x}\right)^5$　[x^7]　　　(2)　$\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^7$　[ab^2]

解答　(1)　-105　　(2)　735

解説

(1)　$\left(x^2-x^3-\frac{3}{x}\right)^5$ の展開式の一般項は

$$\frac{5!}{p!q!r!}(x^2)^p(-x^3)^q\left(-\frac{3}{x}\right)^r=(-1)^{q+r}\cdot\frac{5!3^r}{p!q!r!}x^{2p+3q-r}$$

ただし　$p+q+r=5$ …… ①，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

x^7 の項は，$2p+3q-r=7$ …… ② のときである。

①＋② から　$3p+4q=12$

$3p=12-4q$ と $p\geqq0$ から　$12-4q\geqq0$

q は 0 以上の整数であるから　$q=0,\ 1,\ 2,\ 3$

$q=0$ のとき　$3p=12$，　$q=1$ のとき　$3p=8$

$q=2$ のとき　$3p=4$，　$q=3$ のとき　$3p=0$

p は 0 以上の整数であるから　$(p,\ q)=(0,\ 3),\ (4,\ 0)$

よって，① から　$(p,\ q,\ r)=(0,\ 3,\ 2),\ (4,\ 0,\ 1)$

したがって，求める係数は　$(-1)^5\cdot\frac{5!3^2}{0!3!2!}+(-1)\cdot\frac{5!3}{4!0!1!}=-90-15=-105$

(2)　$\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^7$ の展開式の一般項は

$$\frac{7!}{p!q!r!s!}a^pb^q\left(\frac{1}{a}\right)^r\left(\frac{1}{b}\right)^s=\frac{7!}{p!q!r!s!}a^{p-r}b^{q-s}$$

ただし　$p+q+r+s=7$，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$，$s\geqq0$

ab^2 の項は，$p-r=1$，$q-s=2$ のときである。

$p-r=1$ から　$r=p-1$，　$q-s=2$ から　$s=q-2$

$p+q+r+s=7$ に代入して　$p+q+(p-1)+(q-2)=7$

整理すると　$p+q=5$

また，$r=p-1$ と $r\geqq0$，$s=q-2$ と $s\geqq0$ から　$p\geqq1$，$q\geqq2$

$p+q=5$ を満たす $p\geqq1$，$q\geqq2$ である整数 p，q の値は

$(p,\ q)=(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)$

$r=p-1$，$s=q-2$ に代入して，条件を満たす p，q，r，s の値の組は

$(p,\ q,\ r,\ s)=(1,\ 4,\ 0,\ 2),\ (2,\ 3,\ 1,\ 1),\ (3,\ 2,\ 2,\ 0)$

したがって，求める係数は

$$\frac{7!}{1!4!0!2!}+\frac{7!}{2!3!1!1!}+\frac{7!}{3!2!2!0!}=105+420+210=735$$

6．(1)　次の数の下位 5 桁を求めよ。

(ア)　101^{100}　　　(イ)　99^{100}

(2)　29^{51} を 900 で割ったときの余りを求めよ。

解答　(1)　(ア)　10001　　(イ)　90001　　(2)　629

解説

(1)　(ア)　$101^{100}=(1+100)^{100}=(1+10^2)^{100}$

$=1+{}_{100}C_1\times10^2+{}_{100}C_2\times10^4+10^6\times N$

$=1+10000+495\times10^5+10^6\times N$ (N は自然数)

この計算結果の下位 5 桁は，第 3 項，第 4 項を除いても変わらない。

よって，下位 5 桁は　10001

(イ)　$99^{100}=(-1+100)^{100}=(-1+10^2)^{100}$

$=1-{}_{100}C_1\times10^2+{}_{100}C_2\times10^4+10^6\times M$

$=1-10000+49500000+10^6\times M$

$=49490001+10^6\times M$　(M は自然数)

この計算結果の下位 5 桁は，第 2 項を除いても変わらない。

よって，下位 5 桁は　90001

(2)　$29^{51}=(30-1)^{51}$

$=30^{51}-{}_{51}C_1\times30^{50}+\cdots\cdots-{}_{51}C_{49}\times30^2+{}_{51}C_{50}\times30-1$

$=30^2(30^{49}-{}_{51}C_1\times30^{48}+\cdots\cdots-{}_{51}C_{49})+51\times30-1$

$=900(30^{49}-{}_{51}C_1\times30^{48}+\cdots\cdots-{}_{51}C_{49})+1529$

$=900(30^{49}-{}_{51}C_1\times30^{48}+\cdots\cdots-{}_{51}C_{49}+1)+629$

ここで，$30^{49}-{}_{51}C_1\times30^{48}+\cdots\cdots-{}_{51}C_{49}+1$ は整数であるから，29^{51} を 900 で割った余りは 629 である。

7．(1)　$(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ の展開式を利用して，等式

$${}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+\cdots\cdots+{}_nC_n{}^2={}_{2n}C_n$$

が成り立つことを証明せよ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，等式 ${}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+\cdots\cdots+n{}_nC_n=n\cdot 2^{n-1}$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ を展開したとき，すべての項の係数の和は $\boxed{}$ である。

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　1

解説

(1)　$(1+x)^n(1+x)^n={}_nC_0({}_nC_0+{}_nC_1x+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n)$

$$+{}_nC_1x({}_nC_0+{}_nC_1x+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n)+\cdots\cdots$$

$$+{}_nC_nx^n({}_nC_0+{}_nC_1x+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n)$$

ゆえに，$(1+x)^n(1+x)^n$ の展開式において，x^n の項の係数は，${}_nC_k={}_nC_{n-k}$ により

$${}_nC_0\cdot{}_nC_n+{}_nC_1\cdot{}_nC_{n-1}+\cdots\cdots+{}_nC_k\cdot{}_nC_{n-k}+\cdots\cdots+{}_nC_n\cdot{}_nC_0$$

$$={}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+\cdots\cdots+{}_nC_k{}^2+\cdots\cdots+{}_nC_n{}^2$$

一方，$(1+x)^{2n}$ の展開式において，x^n の項の係数は　${}_{2n}C_n$

したがって　${}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+\cdots\cdots+{}_nC_n{}^2={}_{2n}C_n$

(2)　$k{}_nC_k=k\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=n{}_{n-1}C_{k-1}$

また　$2^{n-1}=(1+1)^{n-1}={}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-1}$

よって，これらのことから

$${}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+\cdots\cdots+n{}_nC_n=n({}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-1})$$

$$=n\cdot 2^{n-1}$$

(3)　展開式の一般項は　${}_5C_r(2x)^{5-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_5C_r\cdot 2^{5-r}(-1)^r\,x^{5-2r}$

展開式の一般項に $x=1$ を代入すると ${}_5C_r\cdot 2^{5-r}\cdot(-1)^r$ となり，これは x^{5-2r} の項の係数である。

よって，求める和は与えられた式に $x=1$ を代入したときの値であるから

$$\left(2\cdot 1-\frac{1}{1}\right)^5=1$$

8．$(x+5)^{80}$ を展開したとき，x の何乗の係数が最大になるか答えよ。

解答　13 乗

解説

$(x+5)^{80}$ の展開式の一般項は　${}_{80}C_kx^{80-k}\cdot 5^k=5^k{}_{80}C_kx^{80-k}$

x^k の項の係数を a_k とすると　$a_k=5^{80-k}{}_{80}C_{80-k}$

よって　$\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\dfrac{5^{79-k}{}_{80}C_{79-k}}{5^{80-k}{}_{80}C_{80-k}}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{80!}{(79-k)!\{80-(79-k)\}!}\times\dfrac{(80-k)!\{80-(80-k)\}!}{80!}$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{80!}{(79-k)!(k+1)!}\cdot\frac{(80-k)!k!}{80!}=\frac{80-k}{5(k+1)}$$

[1]　$\dfrac{a_{k+1}}{a_k}<1$ とすると　$\dfrac{80-k}{5(k+1)}<1$

両辺に $5(k+1)$ $[>0]$ を掛けて　$80-k<5(k+1)$

これを解いて　$k>\dfrac{75}{6}=12.5$

よって，$k\geqq 13$ のとき　$a_k>a_{k+1}$

[2]　$\dfrac{a_{k+1}}{a_k}>1$ とすると　$80-k>5(k+1)$

これを解いて　$k<\dfrac{75}{6}=12.5$

よって，$k\leqq 12$ のとき　$a_k<a_{k+1}$

ゆえに　$a_1<a_2<\cdots\cdots<a_{12}<a_{13}$，$a_{13}>a_{14}>\cdots\cdots>a_{80}$

よって，x の 13 乗の係数が最大になる。