数学演習（式と証明）Ｈ２３．１．２７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x^2-8x-20}{3x^2+5x-2}\times\dfrac{3x^2-31x+10}{x^3-2x^2-80x}$　　(2) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-x-12}\div\dfrac{x^2-4}{x^2+5x+6}$

２．次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}}$　　(2) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$

３．次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$　　(2) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}$

(3) $\dfrac{4}{x^2+2x-8}-\dfrac{5}{x^2+3x-10}$　　(4) $\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}-\dfrac{x-3}{x^2+4x+3}$

４．次の等式が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

(1) $(x^2-4x+a)(x+5)=(x-1)(x^2+bx+c)$

(2) $x^3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

５．次の等式が x についての恒等式であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

$$\frac{a}{x+2}+\frac{b}{3x-1}=\frac{3x-8}{3x^2+5x-2}$$

６．次の等式が x，y についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ。

$$x^2+y^2=a(x+y)^2+b(x-y)^2$$

７．等式 $(a^2+1)x+(a^2+2a)y-2a+1=0$ が，どんな a の値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ。

８．$a:b:c=2:3:4$ のとき $\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ の値を求めよ。

９．$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。　$2\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{4a+b}$

10．次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$x^2+y^2 \geqq 2(x+y-1)$$

11．$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。　$\dfrac{b}{3a}+\dfrac{12a}{b} \geqq 4$

数学演習（式と証明）Ｈ２３．１．２７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x^2-8x-20}{3x^2+5x-2}\times\dfrac{3x^2-31x+10}{x^3-2x^2-80x}$　　(2) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-x-12}\div\dfrac{x^2-4}{x^2+5x+6}$

解答 (1) $\dfrac{x-10}{x(x+8)}$　(2) $\dfrac{x}{x-4}$

解説

(1) (与式)$=\dfrac{(x+2)(x-10)}{(x+2)(3x-1)}\times\dfrac{(x-10)(3x-1)}{x(x+8)(x-10)}=\dfrac{x-10}{x(x+8)}$

(2) (与式)$=\dfrac{x^2-2x}{x^2-x-12}\times\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-4}=\dfrac{x(x-2)}{(x+3)(x-4)}\times\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{x}{x-4}$

2．次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}}$　　(2) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$

解答 (1) $\dfrac{1}{x}$　(2) $\dfrac{1}{x}$

解説

(1) 分子、分母をそれぞれ先に通分してしまう。そして，$\dfrac{分子}{分母}$を分子÷分母と書きなおす。

$$(与式)=\frac{\dfrac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)}}{\dfrac{1+x-(1-x)}{(1-x)(1+x)}}=\frac{\dfrac{2}{(1-x)(1+x)}}{\dfrac{2x}{(1-x)(1+x)}}=\frac{2}{(1-x)(1+x)}\div\frac{2x}{(1-x)(1+x)}$$

$$=\frac{2}{(1-x)(1+x)}\times\frac{(1-x)(1+x)}{2x}=\frac{1}{x}$$

別解　分子分母に$(1-x)(1+x)$をかけると，分子も分母も分数の形を回避できる。

$$(与式)=\frac{(1-x)(1+x)\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}\right)}{(1-x)(1+x)\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)}=\frac{1+x+1-x}{1+x-(1-x)}=\frac{1}{x}$$

(2) (与式)$=1-\dfrac{1}{\dfrac{1-x-1}{1-x}}=1-\dfrac{1}{\dfrac{x}{x-1}}=1-\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x-(x-1)}{x}=\dfrac{1}{x}$

参考　$\dfrac{1}{\dfrac{x}{x-1}}$ は $\dfrac{1}{\dfrac{x}{x-1}}=1\div\dfrac{x}{x-1}=1\times\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$となる

3．次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$　　(2) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}$

(3) $\dfrac{4}{x^2+2x-8}-\dfrac{5}{x^2+3x-10}$　　(4) $\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}-\dfrac{x-3}{x^2+4x+3}$

解答 (1) $\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}$　(2) $\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$

(3) $-\dfrac{x}{(x-2)(x+4)(x+5)}$　(4) $\dfrac{3}{(x+2)(x+3)}$

解説

(1) (与式)$=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)(x+2)}-\dfrac{x+1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{x(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x+2)}$

(2) (与式)$=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{x+3}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\dfrac{x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{2(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$

(3) (与式)$=\dfrac{4}{(x-2)(x+4)}-\dfrac{5}{(x-2)(x+5)}$

$=\dfrac{4(x+5)}{(x-2)(x+4)(x+5)}-\dfrac{5(x+4)}{(x-2)(x+4)(x+5)}$

$=\dfrac{4(x+5)-5(x+4)}{(x-2)(x+4)(x+5)}=-\dfrac{x}{(x-2)(x+4)(x+5)}$

(4) (与式)$=\dfrac{x-1}{(x+1)(x+2)}-\dfrac{x-3}{(x+1)(x+3)}$

$=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}-\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{(x-1)(x+3)-(x-3)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\dfrac{3(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{3}{(x+2)(x+3)}$

4．次の等式が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

(1) $(x^2-4x+a)(x+5)=(x-1)(x^2+bx+c)$

(2) $x^3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

解答 (1) $a=3$，$b=2$，$c=-15$　(2) $a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=-1$

解説

(1) 等式の両辺を x について整理すると

$$x^3+x^2+(a-20)x+5a=x^3+(b-1)x^2+(-b+c)x-c$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$1=b-1$，$a-20=-b+c$，$5a=-c$

これを解いて　$a=3$，$b=2$，$c=-15$

(2) 等式の右辺を x について整理すると

$$x^3=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c+d$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$1=a$，$0=3a+b$，$0=3a+2b+c$，$0=a+b+c+d$

これを解いて　$a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=-1$

5．次の等式が x についての恒等式であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

$$\frac{a}{x+2}+\frac{b}{3x-1}=\frac{3x-8}{3x^2+5x-2}$$

解答 $a=2$，$b=-3$

解説

$3x^2+5x-2=(x+2)(3x-1)$ であるから，等式の両辺に $(x+2)(3x-1)$ をかけると，次の等式が得られる。

$$a(3x-1)+b(x+2)=3x-8$$

左辺を x について整理すると　$(3a+b)x-a+2b=3x-8$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから　$3a+b=3$，$-a+2b=-8$

これを解いて　$a=2$，$b=-3$

6．次の等式が x，y についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ。

$$x^2+y^2=a(x+y)^2+b(x-y)^2$$

解答　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$

解説

右辺を展開して整理すると，等式は

$$x^2+y^2=(a+b)x^2+(2a-2b)xy+(a+b)y^2$$

両辺の各項の係数を比較して　$a+b=1$，$2a-2b=0$

これを解いて　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$

7．等式 $(a^2+1)x+(a^2+2a)y-2a+1=0$ が，どんな a の値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ。

解答　$x=-1$，$y=1$

解説

等式の左辺を a について整理すると　$(x+y)a^2+2(y-1)a+x+1=0$

この等式が a についての恒等式であるための条件は

$$x+y=0,\ y-1=0,\ x+1=0$$

第 2 式と第 3 式から　$y=1$，$x=-1$

これは，$x+y=0$ を満たす。

したがって　$x=-1$，$y=1$

8．$a:b:c=2:3:4$ のとき　$\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ の値を求めよ。

解答　$\dfrac{26}{29}$

解説

$a:b:c=2:3:4$ から　$\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{4}$

$\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{4}=k$ とおくと　$a=2k$，$b=3k$，$c=4k$

よって　$\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{2k\cdot3k+3k\cdot4k+4k\cdot2k}{(2k)^2+(3k)^2+(4k)^2}=\dfrac{26k^2}{29k^2}=\dfrac{26}{29}$

9．$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。　$2\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{4a+b}$

解答　略

解説

$(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{4a+b})^2=(4a+4\sqrt{ab}+b)-(4a+b)=4\sqrt{ab}>0$

よって　$(2\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{4a+b})^2$

$2\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，$\sqrt{4a+b}>0$ であるから　$2\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{4a+b}$

10．次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$x^2+y^2\geqq 2(x+y-1)$$

解答　証明略，等号が成り立つのは $x=y=1$ のとき

解説

$(x^2+y^2)-2(x+y-1)=(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)=(x-1)^2+(y-1)^2\geqq 0$

よって　$x^2+y^2\geqq 2(x+y-1)$

等号が成り立つのは，$x-1=0$ かつ $y-1=0$，すなわち $x=y=1$ のときである。

11．$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。　$\dfrac{b}{3a}+\dfrac{12a}{b}\geqq 4$

解答　略

解説

$a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{b}{3a}>0$，$\dfrac{12a}{b}>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) により

$\dfrac{b}{3a}+\dfrac{12a}{b}\geqq 2\sqrt{\dfrac{b}{3a}\cdot\dfrac{12a}{b}}=2\sqrt{4}=4$　　よって　$\dfrac{b}{3a}+\dfrac{12a}{b}\geqq 4$

$\left(\text{等号が成り立つのは，}\dfrac{b}{3a}=\dfrac{12a}{b}\text{ すなわち }b=6a\text{ のときである。}\right)$