数学演習（式と証明）Ｈ２３．１．２３　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．次の条件を満たす多項式 A，B を求めよ。

(1)　A を $2x+3$ で割ると，商が x^2-3x+1 で，余りが 4

(2)　x^3-2x^2+x+7 を B で割ると，商が $x+1$ で，余りが 3

２．次の式 A，B を x についての多項式とみて，A を B で割った商と余りを求めよ。

(1)　$A=x^2-4xy+3y^2$，$B=x-3y$　　(2)　$A=8x^3-27y^3$，$B=2x-3y$

３．次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x^2-8x-20}{3x^2+5x-2}\times\dfrac{3x^2-31x+10}{x^3-2x^2-80x}$　　(2)　$\dfrac{x^2+x-12}{x^2-4}\div\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+5x+6}\times\dfrac{x^2-2x}{x^2-9}$

４．次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x}{x^2-8x+15}+\dfrac{x}{x^2-12x+35}$　　(2)　$\dfrac{2x-1}{x^2-x-20}-\dfrac{2x+1}{x^2+x-30}$

５．次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{2x}{x^2-y^2}$　　(2)　$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{4x}{x^4+1}$

６．次の式を簡単にせよ。

(1)　$\dfrac{x-\dfrac{4}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}$　　(2)　$1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$

7．次の等式が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

(1)　$(x^2-4x+a)(x+5)=(x-1)(x^2+bx+c)$

(2)　$x^3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

8．次の等式が x，y についての恒等式となるように，定数 a，bの値を定めよ。

$$x^2+y^2=a(x+y)^2+b(x-y)^2$$

9．等式 $(a^2+1)x+(a^2+2a)y-2a+1=0$ が，どんな a の値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ。

10. (1)　等式 $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$ を証明せよ。

(2)　$a+b+1=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$a(a^2-1)-b(b^2-1)=a(a+1)(b^2-a^2)$$

11. 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$x^2+2xy+5y^2-4x-8y+5\geqq 0$$

12. $a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。　$\dfrac{b}{3a}+\dfrac{12a}{b}\geqq 4$

1． 次の条件を満たす多項式 A，B を求めよ。

(1)　A を $2x+3$ で割ると，商が x^2-3x+1 で，余りが 4

(2)　x^3-2x^2+x+7 を B で割ると，商が $x+1$ で，余りが 3

解答　(1)　$2x^3-3x^2-7x+7$　　(2)　x^2-3x+4

解説

(1)　条件から，次の等式が成り立つ。

$$A=(2x+3)(x^2-3x+1)+4$$

右辺を展開すると　$A=2x^3-6x^2+2x+3x^2-9x+3+4$

$$=2x^3-3x^2-7x+7$$

(2)　条件から，次の等式が成り立つ。

$$x^3-2x^2+x+7=B\times(x+1)+3$$

ゆえに　$x^3-2x^2+x+4=B\times(x+1)$

よって，x^3-2x^2+x+4 は $x+1$ で割り切れて，その商が B である。

右の計算により　$B=x^2-3x+4$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & x^2 & -3x & +4 \\ \hline
x+1 \,) & x^3 & -2x^2 & +x & +4 \\
 & x^3 & +x^2 & & \\ \hline
 & & -3x^2 & +x & +4 \\
 & & -3x^2 & -3x & \\ \hline
 & & & 4x & +4 \\
 & & & 4x & +4 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

2． 次の式 A，B を x についての多項式とみて，A を B で割った商と余りを求めよ。

(1)　$A=x^2-4xy+3y^2$，$B=x-3y$　　(2)　$A=8x^3-27y^3$，$B=2x-3y$

解答　(1)　商 $x-y$，余り 0　　(2)　商 $4x^2+6xy+9y^2$，余り 0

解説

(1)

$$\begin{array}{rrrr}
 & x & -y & \\ \hline
x-3y \,) & x^2 & -4xy & +3y^2 \\
 & x^2 & -3xy & \\ \hline
 & & -xy & +3y^2 \\
 & & -xy & +3y^2 \\ \hline
 & & & 0
\end{array}$$

商 $x-y$，余り 0

(2)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 4x^2 & +6xy & +9y^2 & \\ \hline
2x-3y \,) & 8x^3 & & & -27y^3 \\
 & 8x^3 & -12x^2y & & \\ \hline
 & & 12x^2y & & \\
 & & 12x^2y & -18xy^2 & \\ \hline
 & & & 18xy^2 & -27y^3 \\
 & & & 18xy^2 & -27y^3 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

商 $4x^2+6xy+9y^2$，余り 0

3． 次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x^2-8x-20}{3x^2+5x-2}\times\dfrac{3x^2-31x+10}{x^3-2x^2-80x}$　　(2)　$\dfrac{x^2+x-12}{x^2-4}\div\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+5x+6}\times\dfrac{x^2-2x}{x^2-9}$

解答　(1)　$\dfrac{x-10}{x(x+8)}$　　(2)　$\dfrac{x}{x-1}$

解説

(1)　$(与式)=\dfrac{(x+2)(x-10)}{(x+2)(3x-1)}\times\dfrac{(x-10)(3x-1)}{x(x+8)(x-10)}=\dfrac{x-10}{x(x+8)}$

(2)　$(与式)=\dfrac{x^2+x-12}{x^2-4}\times\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x-4}\times\dfrac{x^2-2x}{x^2-9}$

$=\dfrac{(x-3)(x+4)}{(x+2)(x-2)}\times\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)}\times\dfrac{x(x-2)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{x}{x-1}$

4． 次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x}{x^2-8x+15}+\dfrac{x}{x^2-12x+35}$　　(2)　$\dfrac{2x-1}{x^2-x-20}-\dfrac{2x+1}{x^2+x-30}$

解答　(1)　$\dfrac{2x}{(x-3)(x-7)}$　　(2)　$\dfrac{2}{(x+4)(x+6)}$

解説

(1)　$(与式)=\dfrac{x}{(x-3)(x-5)}+\dfrac{x}{(x-5)(x-7)}=\dfrac{x\{(x-7)+(x-3)\}}{(x-3)(x-5)(x-7)}$

$=\dfrac{x\cdot 2(x-5)}{(x-3)(x-5)(x-7)}=\dfrac{2x}{(x-3)(x-7)}$

(2)　$(与式)=\dfrac{2x-1}{(x+4)(x-5)}-\dfrac{2x+1}{(x-5)(x+6)}=\dfrac{(2x-1)(x+6)-(2x+1)(x+4)}{(x+4)(x-5)(x+6)}$

$=\dfrac{2(x-5)}{(x+4)(x-5)(x+6)}=\dfrac{2}{(x+4)(x+6)}$

5． 次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{2x}{x^2-y^2}$　　(2)　$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{4x}{x^4+1}$

解答　(1)　$\dfrac{2}{x+y}$　　(2)　$\dfrac{8x}{x^8-1}$

解説

(1)　$(与式)=\dfrac{x-y-(x+y)}{(x+y)(x-y)}+\dfrac{2x}{x^2-y^2}=\dfrac{-2y}{(x+y)(x-y)}+\dfrac{2x}{(x+y)(x-y)}$

$=\dfrac{2(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{2}{x+y}$

(2)　$(与式)=\dfrac{x+1+x-1}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{4x}{x^4+1}=\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{4x}{x^4+1}$

$=\dfrac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}-\dfrac{4x}{x^4+1}=\dfrac{4x}{x^4-1}-\dfrac{4x}{x^4+1}$

$=\dfrac{4x\{x^4+1-(x^4-1)\}}{(x^4-1)(x^4+1)}=\dfrac{4x\cdot 2}{(x^4-1)(x^4+1)}=\dfrac{8x}{(x^4-1)(x^4+1)}=\dfrac{8x}{x^8-1}$

6． 次の式を簡単にせよ。

(1)　$\dfrac{x-\dfrac{4}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}$　　(2)　$1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$

解答　(1)　$x+2$　　(2)　$\dfrac{1}{x}$

解説

(1)　分子、分母をそれぞれ先に通分してしまう。そして、$\dfrac{分子}{分母}$を分子÷分母と書きなおす。

$(与式)=\dfrac{\dfrac{x^2-4}{x}}{\dfrac{x-2}{x}}=\dfrac{x^2-4}{x}\div\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{x^2-4}{x}\times\dfrac{x}{x-2}$

$=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x}\times\dfrac{x}{x-2}=x+2$

別解　分子分母にxをかけると，分子も分母も分数の形を回避できる。

$(与式)=\dfrac{x\left(x-\dfrac{4}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$

(2)　$(与式)=1-\dfrac{1}{\dfrac{1-x-1}{1-x}}=1-\dfrac{1}{\dfrac{x}{x-1}}=1-\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x-(x-1)}{x}=\dfrac{1}{x}$

参考　$\dfrac{1}{\dfrac{x}{x-1}}$　は　$\dfrac{1}{\dfrac{x}{x-1}}=1\div\dfrac{x}{x-1}=1\times\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$ となる

7．次の等式が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

(1)　$(x^2-4x+a)(x+5)=(x-1)(x^2+bx+c)$

(2)　$x^3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

解答　(1)　$a=3$，$b=2$，$c=-15$　　(2)　$a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=-1$

解説

(1)　等式の両辺を x について整理すると

$$x^3+x^2+(a-20)x+5a=x^3+(b-1)x^2+(-b+c)x-c$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$1=b-1,\ a-20=-b+c,\ 5a=-c$$

これを解いて　$a=3$，$b=2$，$c=-15$

(2)　等式の右辺を x について整理すると

$$x^3=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c+d$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$1=a,\ 0=3a+b,\ 0=3a+2b+c,\ 0=a+b+c+d$$

これを解いて　$a=1$，$b=-3$，$c=3$，$d=-1$

8．次の等式が x，y についての恒等式となるように，定数 a，bの値を定めよ。

$$x^2+y^2=a(x+y)^2+b(x-y)^2$$

解答　$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$

解説

右辺を展開して整理すると，等式は

$$x^2+y^2=(a+b)x^2+(2a-2b)xy+(a+b)y^2$$

両辺の各項の係数を比較して　$a+b=1$，$2a-2b=0$

これを解いて　$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$

9．等式 $(a^2+1)x+(a^2+2a)y-2a+1=0$ が，どんな a の値に対しても成り立つように，x，y の値を定めよ。

解答　$x=-1$，$y=1$

解説

等式の左辺を a について整理すると　$(x+y)a^2+2(y-1)a+x+1=0$

この等式が a についての恒等式であるための条件は

$$x+y=0,\ y-1=0,\ x+1=0$$

第 2 式と第 3 式から　$y=1$，$x=-1$

これは，$x+y=0$ を満たす。

したがって　$x=-1$，$y=1$

10．(1)　等式 $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$ を証明せよ。

(2)　$a+b+1=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$a(a^2-1)-b(b^2-1)=a(a+1)(b^2-a^2)$$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　(左辺)$=a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2$

(右辺)$=(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)-(a^2d^2+2abcd+b^2c^2)$

$=a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2$

よって，等式は成り立つ。

(2)　$a+b+1=0$ から　$b=-(a+1)$

(左辺)$=a(a+1)(a-1)-\{-(a+1)\}\{(a+1)^2-1\}$

$=(a+1)\{a(a-1)+(a+1)^2-1\}$

$=(a+1)(a^2-a+a^2+2a+1-1)$

$=(a+1)(2a^2+a)=a(a+1)(2a+1)$

(右辺)$=a(a+1)\{(a+1)^2-a^2\}=a(a+1)(a^2+2a+1-a^2)$

$=a(a+1)(2a+1)$

よって，等式は成り立つ。

別解　$a+b+1=0$ から　$a+1=-b$，$b+1=-a$，$a+b=-1$

(左辺)$-$(右辺)$=a(a+1)(a-1)-b(b+1)(b-1)-a(a+1)(b+a)(b-a)$

$=a(-b)(a-1)-b(-a)(b-1)-a(-b)(-1)(b-a)$

$=-ab(a-1)+ab(b-1)-ab(b-a)$

$=-ab(a-1-b+1+b-a)=0$

よって，等式は成り立つ。

11．次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$x^2+2xy+5y^2-4x-8y+5\geqq 0$$

解答　証明略，等号が成り立つのは $x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ のとき

解説

$x^2+2xy+5y^2-4x-8y+5=x^2+2(y-2)x+5y^2-8y+5$

$=\{x^2+2(y-2)x+(y-2)^2\}-(y-2)^2+5y^2-8y+5$

$=\{x+(y-2)\}^2+4y^2-4y+1$

$=(x+y-2)^2+(2y-1)^2\geqq 0$

等号が成り立つのは，$x+y-2=0$ かつ $2y-1=0$，すなわち $x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ のときである。

12．$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。　$\frac{b}{3a}+\frac{12a}{b}\geqq 4$

解答　略

解説

$a>0$，$b>0$ のとき，$\frac{b}{3a}>0$，$\frac{12a}{b}>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) により

$$\frac{b}{3a}+\frac{12a}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{b}{3a}\cdot\frac{12a}{b}}=2\sqrt{4}=4$$　よって　$\frac{b}{3a}+\frac{12a}{b}\geqq 4$

$\left(\text{等号が成り立つのは，}\frac{b}{3a}=\frac{12a}{b}\text{ すなわち }b=6a\text{ のときである。}\right)$