数学演習（式と証明）Ｈ２１．７．２　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　)

１．次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x^2+4x+5}{x+3}-\dfrac{x^2+5x+6}{x+4}$

(2) $\dfrac{3a^2+8a+4}{a^2-1}\div\dfrac{6a^2+a-2}{a^2+a}\times\dfrac{2a-1}{a+2}$

(3) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+a}}}$

２．$a^3-2ab^2+4b^3$ を $a+2b$ で割った商と余りを求めよ。

３．等式 $a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)=6$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

４．$\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+x}{y}=\dfrac{x+y}{z}$ のとき，この式の値を求めよ。

５．$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，等式 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$ が成り立つことを証明せよ。

6．次の不等式を証明せよ。　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$

7．次の不等式が成り立つことを証明せよ。　$a>b>0$ のとき　$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

8．次の不等式を証明せよ。　$|a+b|\leqq|a|+|b|$

9．$x>0$ のとき，不等式 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\geqq 9$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは，どのようなときか。

10．$2x+y-3z=3$，$3x+2y-z=2$ を満たすすべての実数 x，y，z に対して，$px^2+qy^2+rz^2=12$ が成立するような定数 p，q，r の値を求めよ。

1．次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x^2+4x+5}{x+3}-\dfrac{x^2+5x+6}{x+4}$　　(2) $\dfrac{3a^2+8a+4}{a^2-1}\div\dfrac{6a^2+a-2}{a^2+a}\times\dfrac{2a-1}{a+2}$

(3) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+a}}}$

解答　(1) $\dfrac{2}{(x+3)(x+4)}$　(2) $\dfrac{a}{a-1}$　(3) $-a$

解説

(1) $\dfrac{x^2+4x+5}{x+3}-\dfrac{x^2+5x+6}{x+4}$

$$\begin{array}{r}x+1\\ x+3\,\big)\overline{\,x^2+4x+5}\\ \underline{x^2+3x}\\ x+5\\ \underline{x+3}\\ 2\end{array}\qquad\begin{array}{r}x+1\\ x+4\,\big)\overline{\,x^2+5x+6}\\ \underline{x^2+4x}\\ x+6\\ \underline{x+4}\\ 2\end{array}$$

$=\dfrac{(x+3)(x+1)+2}{x+3}-\dfrac{(x+4)(x+1)+2}{x+4}$

$=\left(x+1+\dfrac{2}{x+3}\right)-\left(x+1+\dfrac{2}{x+4}\right)$

$=\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{2}{x+4}=\dfrac{2\{(x+4)-(x+3)\}}{(x+3)(x+4)}$

$=\dfrac{2}{(x+3)(x+4)}$

(2) $\dfrac{3a^2+8a+4}{a^2-1}\div\dfrac{6a^2+a-2}{a^2+a}\times\dfrac{2a-1}{a+2}=\dfrac{3a^2+8a+4}{a^2-1}\times\dfrac{a^2+a}{6a^2+a-2}\times\dfrac{2a-1}{a+2}$

$=\dfrac{(a+2)(3a+2)}{(a+1)(a-1)}\times\dfrac{a(a+1)}{(2a-1)(3a+2)}\times\dfrac{2a-1}{a+2}=\dfrac{a}{a-1}$

(3) (与式) $=\dfrac{1}{1-\dfrac{1+a}{(1+a)-1}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1+a}{a}}=\dfrac{a}{a-(1+a)}=\dfrac{a}{-1}=-a$

2．$a^3-2ab^2+4b^3$ を $a+2b$ で割った商と余りを求めよ。

解答　商 $a^2-2ab+2b^2$，余り 0

解説

$$\begin{array}{r}a^2-2ba+2b^2\\ a+2b\,\big)\overline{\,a^3\qquad\quad-2b^2a+4b^3}\\ \underline{a^3+2ba^2\qquad\qquad\qquad}\\ -2ba^2-2b^2a\\ \underline{-2ba^2-4b^2a}\\ 2b^2a+4b^3\\ \underline{2b^2a+4b^3}\\ 0\end{array}$$

商　$a^2-2ab+2b^2$

余り　0

3．等式 $a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)=6$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

解答　$a=3$，$b=3$，$c=-6$

解説

与式が x についての恒等式であるならば，x にどのような値を代入しても等式が成り立つから　$x=1$ を代入して　$2b=6$

$x=2$ を代入して　$-c=6$

$x=3$ を代入して　$2a=6$

よって　$a=3$，$b=3$，$c=-6$

逆に，このとき与式の左辺は

$3(x-1)(x-2)+3(x-2)(x-3)-6(x-3)(x-1)$

$=3(x^2-3x+2)+3(x^2-5x+6)-6(x^2-4x+3)=6$

となり，右辺と一致するから，与式は恒等式となる。

ゆえに　$a=3$，$b=3$，$c=-6$

別解　(「逆に」以下を，次のように述べてもよい。)

このとき，等式の両辺は 2 次以下の多項式であり，異なる 3 個の x の値に対して等式が成り立つ。

よって，この等式は恒等式である。

ゆえに　$a=3$，$b=3$，$c=-6$

4．$\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+x}{y}=\dfrac{x+y}{z}$ のとき，この式の値を求めよ。

解答　$x+y+z\neq0$ のとき 2，$x+y+z=0$ のとき -1

解説

$\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+x}{y}=\dfrac{x+y}{z}=k$ とおくと

$y+z=xk$，$z+x=yk$，$x+y=zk$　…… ①

辺々を加えると　$2(x+y+z)=(x+y+z)k$

[1]　$x+y+z\neq0$ のとき　$k=2$

このとき，① は　$y+z=2x$，$z+x=2y$，$x+y=2z$

これらを解いて　$x=y=z$

よって，$xyz\neq0$ とすることができる。

[2]　$x+y+z=0$ のとき　$y+z=-x$

よって　$k=\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{-x}{x}=-1$

[1]，[2] から　$x+y+z\neq0$ のとき　2，　$x+y+z=0$ のとき　-1

5．$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，等式 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$ が成り立つことを証明せよ。

解答　略

解説

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk$，　$c=dk$

よって　$\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{bk+b}{bk-b}=\dfrac{b(k+1)}{b(k-1)}=\dfrac{k+1}{k-1}$

$\dfrac{c+d}{c-d}=\dfrac{dk+d}{dk-d}=\dfrac{d(k+1)}{d(k-1)}=\dfrac{k+1}{k-1}$

ゆえに　$\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$

別解　条件式 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ より，$c=\dfrac{ad}{b}$ であるから

(右辺) $=\dfrac{\dfrac{ad}{b}+d}{\dfrac{ad}{b}-d}=\dfrac{ad+bd}{ad-bd}=\dfrac{a+b}{a-b}=$ (左辺)

6．次の不等式を証明せよ。　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$

解答　証明略 等号は $ay=bx$ のとき成り立つ

解説

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=(a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2)-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$$
$$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2\geqq0$$

よって　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$

等号が成り立つのは，$ay-bx=0$ すなわち $ay=bx$ のときである。

7．次の不等式が成り立つことを証明せよ。　$a>b>0$ のとき　$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

解答　略

解説

$$(\text{左辺})^2-(\text{右辺})^2=(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$
$$=(a-b)-(a-2\sqrt{ab}+b)$$
$$=2\sqrt{ab}-2b=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

$a>b>0$ より，$2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$ であるから　$(\sqrt{a-b})^2>(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$\sqrt{a-b}>0$，$\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$ であるから　$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

8．次の不等式を証明せよ。　$|a+b|\leqq|a|+|b|$

解答　略

解説

$$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a+b)^2$$
$$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$$
$$=2(|ab|-ab)\geqq0 \qquad (\because |ab|\geqq ab \text{ より})$$

よって　$|a+b|^2\leqq(|a|+|b|)^2$

$|a+b|\geqq0$，$|a|+|b|\geqq0$ であるから　$|a+b|\leqq|a|+|b|$

等号は $|ab|=ab$ つまり，$ab\geqq0$ のときに成り立つ。

9．$x>0$ のとき，不等式 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\geqq9$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは，どのようなときか。

解答　証明略 等号は $x=\sqrt{2}$ のとき成り立つ

解説

左辺を展開して　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{4}{x}\right)=x^2+x\cdot\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x}\cdot x+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{4}{x}=x^2+\dfrac{4}{x^2}+5$

$x^2>0$，$\dfrac{4}{x^2}>0$ であるから，(相加平均) $\geqq$ (相乗平均) により

$$x^2+\frac{4}{x^2}\geqq2\sqrt{x^2\cdot\frac{4}{x^2}}=2\cdot\sqrt{4}=4$$

よって　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{4}{x}\right)=x^2+\dfrac{4}{x^2}+5\geqq4+5=9$

等号が成り立つのは　$x^2=\dfrac{4}{x^2}$　すなわち　$(x^2)^2=4$ のとき

$x^2>0$ から　$x^2=2$　　更に，$x>0$ から　$x=\sqrt{2}$

ゆえに，等号が成り立つのは $x=\sqrt{2}$ のときである。

注意

「$x>0$ であるので，$x+\dfrac{1}{x}\geqq2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$，$x+\dfrac{4}{x}\geqq2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}=4$

よって　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\geqq2\cdot4=8$……(※)」

という証明は**絶対にやってはいけない**。それは，(※)式において等号が成り立つような x は存在しないからである。なぜならば，$x+\dfrac{1}{x}=2$ となる x は $x=1$ のときで，$x+\dfrac{4}{x}=4$ となる x は $x=2$ のときであるからである。

10．$2x+y-3z=3$，$3x+2y-z=2$ を満たすすべての実数 x，y，z に対して，$px^2+qy^2+rz^2=12$ が成立するような定数 p，q，r の値を求めよ。

解答　$p=7$，$q=-4$，$r=21$

解説

$2x+y-3z=3$ ……①，　$3x+2y-z=2$ ……②　とする。

①×2−② から　$x-5z=4$　ゆえに　$x=5z+4$

②×2−①×3 から　$y+7z=-5$　ゆえに　$y=-7z-5$

これらを $px^2+qy^2+rz^2=12$ に代入すると

$$p(5z+4)^2+q(-7z-5)^2+rz^2=12$$

よって　$p(25z^2+40z+16)+q(49z^2+70z+25)+rz^2=12$

左辺を z について整理すると

$$(25p+49q+r)z^2+10(4p+7q)z+(16p+25q)=12$$

この等式が z についての恒等式となるのは，両辺の同じ次数の項の係数が等しいときであるから

$25p+49q+r=0$ ……③，　$4p+7q=0$ ……④，　$16p+25q=12$ ……⑤

④×4−⑤ から　$3q=-12$　ゆえに　$q=-4$

よって，④ から　$p=7$

更に，③ から　$175-196+r=0$　ゆえに　$r=21$