数学演習（式と証明）Ｈ２１．１０．２０　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

１．次の条件を満たす多項式 A，B を求めよ。

(1)　A を x^2+x-3 で割ると，商が $4x-1$，余りが $13x-5$ である。

(2)　$2x^3-3x^2+2x+8$ を B で割ると，商が x^2-2x+2，余りが 6 である。

２．次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x^2-4}{x^2-x}\times\dfrac{x}{x+2}$　　(2)　$\dfrac{4a^2-b^2}{a^2-4b^2}\div\dfrac{2a+b}{a-2b}$

３．次の計算をせよ。　$\dfrac{x-2}{x^2-x}+\dfrac{3}{x^2+x-2}$

４．次の式を既約分数式で表せ。　$\dfrac{a+3}{a-\dfrac{3}{a+2}}$

５．(1)　等式 $3x^2-2x-1=a(x+1)^2+b(x+1)+c$ が，x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

(2)　等式 $(k+1)x-(3k+2)y+2k+7=0$ がすべての k に対して成り立つとき，定数 x，y の値を求めよ。

６．等式 $x^3-1=a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)$ が，x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

７．次の等式を証明せよ。　$(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$

8．$a+b+c=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$a^2-bc=b^2-ca$$

9．$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，等式 $\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{a}{c}$ が成り立つことを証明せよ。

10. 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

(1) $a^2+b^2 \geqq ab$　　(2) $x^2+y^2 \geqq 2(x+y-1)$

11. $a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ が成り立つことを証明せよ。

12. $a>0$ のとき，不等式 $a+\dfrac{1}{4a} \geqq 1$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

1．次の条件を満たす多項式 A，B を求めよ。

(1)　A を x^2+x-3 で割ると，商が $4x-1$，余りが $13x-5$ である。

(2)　$2x^3-3x^2+2x+8$ を B で割ると，商が x^2-2x+2，余りが 6 である。

解答　(1)　$A=4x^3+3x^2-2$　　(2)　$B=2x+1$

(1)　条件から，次の等式が成り立つ。

$$A=(x^2+x-3)(4x-1)+13x-5$$

右辺を計算して　$A=(4x^3-x^2+4x^2-x-12x+3)+13x-5$

$$=4x^3+3x^2-2$$

(2)　条件から，次の等式が成り立つ。

$$2x^3-3x^2+2x+8=B\times(x^2-2x+2)+6$$

よって　$2x^3-3x^2+2x+2=B\times(x^2-2x+2)$

すなわち，B は，$2x^3-3x^2+2x+2$ を

x^2-2x+2 で割った商である。

右の計算から　$B=2x+1$

$$\begin{array}{r|l} & 2x+1 \\ \hline x^2-2x+2 & 2x^3-3x^2+2x+2 \\ & 2x^3-4x^2+4x \\ \hline & \quad x^2-2x+2 \\ & \quad x^2-2x+2 \\ \hline & \qquad 0 \end{array}$$

2．次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x^2-4}{x^2-x}\times\dfrac{x}{x+2}$　　　(2)　$\dfrac{4a^2-b^2}{a^2-4b^2}\div\dfrac{2a+b}{a-2b}$

解答　(1)　$\dfrac{x-2}{x-1}$　　(2)　$\dfrac{2a-b}{a+2b}$

(1)　$\dfrac{x^2-4}{x^2-x}\times\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{(x+2)(x-2)x}{x(x-1)(x+2)}=\dfrac{x-2}{x-1}$

(2)　$\dfrac{4a^2-b^2}{a^2-4b^2}\div\dfrac{2a+b}{a-2b}=\dfrac{(2a+b)(2a-b)}{(a+2b)(a-2b)}\times\dfrac{a-2b}{2a+b}$

$$=\frac{(2a+b)(2a-b)(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)(2a+b)}$$

$$=\frac{2a-b}{a+2b}$$

3．次の計算をせよ。　$\dfrac{x-2}{x^2-x}+\dfrac{3}{x^2+x-2}$

解答　$\dfrac{x+4}{x(x+2)}$

$$\frac{x-2}{x^2-x}+\frac{3}{x^2+x-2}=\frac{x-2}{x(x-1)}+\frac{3}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-1)(x+2)}+\frac{3x}{x(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{(x-2)(x+2)+3x}{x(x-1)(x+2)}=\frac{x^2+3x-4}{x(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{(x-1)(x+4)}{x(x-1)(x+2)}=\frac{x+4}{x(x+2)}$$

4．次の式を既約分数式で表せ。　$\dfrac{a+3}{a-\dfrac{3}{a+2}}$

解答　$\dfrac{a+2}{a-1}$

［方法 1］（分母）$=\dfrac{a(a+2)-3}{a+2}=\dfrac{a^2+2a-3}{a+2}=\dfrac{(a-1)(a+3)}{a+2}$

よって　　（与式）$=(a+3)\div\dfrac{(a-1)(a+3)}{a+2}=(a+3)\times\dfrac{a+2}{(a-1)(a+3)}=\dfrac{a+2}{a-1}$

［方法 2］（与式）$=\dfrac{(a+2)(a+3)}{a(a+2)-3}=\dfrac{(a+2)(a+3)}{(a-1)(a+3)}=\dfrac{a+2}{a-1}$

5．(1)　等式 $3x^2-2x-1=a(x+1)^2+b(x+1)+c$ が，x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

(2)　等式 $(k+1)x-(3k+2)y+2k+7=0$ がすべての k に対して成り立つとき，定数 x，y の値を求めよ。

解答　(1)　$a=3$，$b=-8$，$c=4$　　(2)　$x=-17$，$y=-5$

(1)　右辺を展開して整理すると

$$3x^2-2x-1=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$$

この等式が x についての恒等式であるとき

$$3=a,\ -2=2a+b,\ -1=a+b+c$$

これを解いて　　$a=3$，$b=-8$，$c=4$

(2)　左辺を k について整理して

$$(x-3y+2)k+x-2y+7=0$$

これがすべての k に対して成り立つとき

$$x-3y+2=0,\ x-2y+7=0$$

これを解いて　　$x=-17$，$y=-5$

6．等式 $x^3-1=a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)$ が，x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

解答　$a=1$，$b=6$，$c=7$

等式に $x=2$，3，0，-1 を代入すると，順に

$7=c$　　…… ①，

$26=2b+2c$　　…… ②，

$-1=-6a+2b-c$　　…… ③，

$-2=-24a+6b-2c$　　…… ④

①，② から　　$c=7$，$b=6$　これを ③ に代入して

$-1=-6a+5$　　ゆえに　$a=1$

$a=1$，$b=6$，$c=7$ を ④ に代入すると，右辺は

$$-24+36-14=-2$$

となり，左辺と一致する。

等式の両辺は 3 次以下の多項式であり，異なる 4 個の値に対して等式が成り立つから，この等式は恒等式である。

以上から　$a=1$，$b=6$，$c=7$

7．次の等式を証明せよ。　$(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$

解答　略

（左辺）$=a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2$

（右辺）$=(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)-(a^2d^2+2abcd+b^2c^2)$

$=a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2$

したがって　$(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$

別解　（右辺）$=\{(ac+bd)+(ad+bc)\}\{(ac+bd)-(ad+bc)\}$

$=\{a(c+d)+b(c+d)\}\{a(c-d)-b(c-d)\}$

$=(a+b)(c+d)(a-b)(c-d)$

$=(a^2-b^2)(c^2-d^2)=$（左辺）

8．$a+b+c=0$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$a^2-bc=b^2-ca$$

解答　略

$a+b+c=0$ から　$c=-a-b$

よって　(左辺) $=a^2-bc=a^2-b(-a-b)$

$=a^2+ab+b^2$

(右辺) $=b^2-ca=b^2-(-a-b)a$

$=a^2+ab+b^2$

したがって　$a^2-bc=b^2-ca$

別解　(左辺) − (右辺) $=a^2-bc-(b^2-ca)$

$=(a-b)c+(a^2-b^2)$

$=(a-b)(c+a+b)$

$a+b+c=0$ から　$(a-b)(a+b+c)=0$

したがって　$a^2-bc=b^2-ca$

9．$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，等式 $\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{a}{c}$ が成り立つことを証明せよ。

解答　略

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk$，$c=dk$

(左辺) $=\dfrac{bk+b}{dk+d}=\dfrac{b(k+1)}{d(k+1)}=\dfrac{b}{d}$，

(右辺) $=\dfrac{bk}{dk}=\dfrac{b}{d}$

したがって　$\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{a}{c}$

10．次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

(1)　$a^2+b^2\geqq ab$　　(2)　$x^2+y^2\geqq 2(x+y-1)$

解答　(1)　証明略，等号が成り立つのは $a=b=0$ のとき

(2)　証明略，等号が成り立つのは $x=y=1$ のとき

(1)　$a^2+b^2-ab=a^2-ba+b^2$

$$=a^2-ba+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+b^2$$

$$=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geqq 0$$

したがって　$a^2+b^2\geqq ab$

等号が成り立つのは，$a-\dfrac{b}{2}=0$　かつ　$b=0$　すなわち　$a=b=0$ のときである。

(2)　$x^2+y^2-2(x+y-1)=(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)$

$=(x-1)^2+(y-1)^2\geqq 0$

したがって　$x^2+y^2\geqq 2(x+y-1)$

等号が成り立つのは，$x-1=0$　かつ　$y-1=0$　すなわち　$x=y=1$ のときである。

11．$a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ が成り立つことを証明せよ。

解答　略

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)$

$=2\sqrt{ab}>0$

したがって　$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，$\sqrt{a+b}>0$ であるから

$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

12．$a>0$ のとき，不等式 $a+\dfrac{1}{4a}\geqq 1$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

解答　証明略，等号は $a=\dfrac{1}{2}$ のときに成り立つ

$a>0$，$\dfrac{1}{4a}>0$ であるから，(相加平均) $\geqq$ (相乗平均) により

$$a+\frac{1}{4a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{4a}}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

したがって　$a+\dfrac{1}{4a}\geqq 1$

等号は，$a>0$　かつ　$a=\dfrac{1}{4a}$　すなわち　$a=\dfrac{1}{2}$ のときに成り立つ。