数学演習（整数の性質）Ｈ２９．１２．１７

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　)

1．次の2つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

(1)　221，91　　(2)　418，247　　(3)　1501，899

2．(1)　等式 $31x+17y=1$ を満たす整数 x，y の組を1つ求めよ。

(2)　等式 $31x+17y=4$ を満たす整数 x，y の組を1つ求めよ。

3．次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$7x+13y=0$　　(2)　$5x+9y=1$

4．14で割ると5余り，9で割ると7余る自然数 n のうち，3桁で最大のものを求めよ。

5．(1)　次の分数のうち，有限小数で表されるものをすべて選べ。

$$\frac{7}{24},\ \frac{9}{32},\ \frac{5}{77},\ \frac{1}{80}$$

(2)　$\dfrac{30}{7}$ を小数で表したとき，小数第100位の数字を求めよ。

6．(1)　次の数を10進法で表せ。

（ア）　$10011_{(2)}$　　（イ）　$1234_{(5)}$　　（ウ）　$634_{(7)}$

(2)　次の10進数を[ ]内の表し方で表せ。

（ア）　39　[2進法]　　（イ）　33　[3進法]　　（ウ）　366　[5進法]

7. (1)　$0.1011_{(2)}$ を 10 進法の小数で表せ。

(2)　10 進数 0.375 を　(ア)　2 進法　(イ)　5 進法　で表せ。

8. 次の計算を 2 進数のまま行い，結果も 2 進法で表せ。

(1)　$1110_{(2)}+1011_{(2)}$　　(2)　$11001_{(2)}-1010_{(2)}$

9. (1)　自然数 N を 7 進法と 5 進法で表すと，ともに 3 桁の数であり，各位の数の並びが逆になるという。N を 10 進法で表せ。

(2)　n は 3 以上の自然数とする。2 進数 $11010_{(2)}$ を n 進法で表すと $222_{(n)}$ となるような n の値を求めよ。

10. (1)　2 進法で表すと 7 桁となるような自然数 N は何個あるか。

(2)　8 進法で表すと 5 桁となる自然数 N を 2 進法で表すと，何桁の数になるか。

1．次の 2 つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

(1)　221，91　　　(2)　418，247　　　(3)　1501，899

解答　(1)　13　　(2)　19　　(3)　1

解説

(1)　$221=91\cdot2+39$

$91=39\cdot2+13$

$39=13\cdot3+0$

よって，最大公約数は　13

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & 2 & 2 \\ 13) & 39 & 91 & 221 \\ & 39 & 78 & 182 \\ \hline & 0 & 13 & 39 \end{array}$$

(2)　$418=247\cdot1+171$

$247=171\cdot1+76$

$171=76\cdot2+19$

$76=19\cdot4+0$

よって，最大公約数は　19

$$\begin{array}{rrrrr} & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 19) & 76 & 171 & 247 & 418 \\ & 76 & 152 & 171 & 247 \\ \hline & 0 & 19 & 76 & 171 \end{array}$$

(3)　$1501=899\cdot1+602$

$899=602\cdot1+297$

$602=297\cdot2+8$

$297=8\cdot37+1$

$8=1\cdot8+0$

よって，最大公約数は　1

$$\begin{array}{rrrrrr} & 8 & 37 & 2 & 1 & 1 \\ 1) & 8 & 297 & 602 & 899 & 1501 \\ & 8 & 296 & 594 & 602 & 899 \\ \hline & 0 & 1 & 8 & 297 & 602 \end{array}$$

2．(1)　等式 $31x+17y=1$ を満たす整数 x，y の組を 1 つ求めよ。

(2)　等式 $31x+17y=4$ を満たす整数 x，y の組を 1 つ求めよ。

解答　(1)　$x=-6$，$y=11$　　(2)　$x=-24$，$y=44$

解説

(1)　$31=17\cdot1+14$　　移項すると　$14=31-17\cdot1$　……①

$17=14\cdot1+3$　　移項すると　$3=17-14\cdot1$　……②

$14=3\cdot4+2$　　移項すると　$2=14-3\cdot4$　……③

$3=2\cdot1+1$　　移項すると　$1=3-2\cdot1$　……④

よって　$1=3-2\cdot1=3-(14-3\cdot4)\cdot1$

$=3\cdot5+14\cdot(-1)$

$=(17-14\cdot1)\cdot5+14\cdot(-1)$

$=17\cdot5+14\cdot(-6)$

$=17\cdot5+(31-17\cdot1)\cdot(-6)$

$=31\cdot(-6)+17\cdot11$

したがって，$31\cdot(-6)+17\cdot11=1$ が成り立つから，求める整数 x，y の組の 1 つは

$x=-6$，$y=11$

(2)　(1) から，$31\cdot(-6)+17\cdot11=1$ が成り立つ。

この両辺を 4 倍して　$31\cdot(-24)+17\cdot44=4$

よって，求める整数 x，y の組の 1 つは　$x=-24$，$y=44$

3．次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$7x+13y=0$　　　(2)　$5x+9y=1$

解答　(1)　$x=13k$，$y=-7k$（k は整数）　(2)　$x=9k+2$，$y=-5k-1$（k は整数）

解説

(1)　方程式を変形すると　$7x=-13y$　……①

$7x$ は 13 の倍数であるが，7 と 13 は互いに素であるから，k を整数として $x=13k$ と表される。

① に代入して　$-13y=7\cdot13k$　　よって　$y=-7k$

ゆえに，すべての整数解は　$x=13k$，$y=-7k$（k は整数）

(2)　$x=2$，$y=-1$ は $5x+9y=1$ ……① の整数解の 1 つである。

よって　$5\cdot2+9\cdot(-1)=1$　……②

①−② から　$5(x-2)+9(y+1)=0$　……③

5 と 9 は互いに素であるから，③ より

$x-2=9k$，$y+1=-5k$（k は整数）

したがって，① のすべての整数解は

$x=9k+2$，$y=-5k-1$（k は整数）

4．14 で割ると 5 余り，9 で割ると 7 余る自然数 n のうち，3 桁で最大のものを求めよ。

解答　943

解説

n は整数 x，y を用いて

$n=14x+5$，　$n=9y+7$

と表される。

よって　$14x+5=9y+7$

すなわち　$14x-9y=2$　……①

$x=2$，$y=3$ は $14x-9y=1$ の整数解の 1 つであるから

$14\cdot2-9\cdot3=1$

この両辺を 2 倍して　$14\cdot4-9\cdot6=2$　……②

①−② から　$14(x-4)-9(y-6)=0$　……③

14 と 9 は互いに素であるから，③ を満たす整数 x は

$x-4=9k$　すなわち　$x=9k+4$（k は整数）

と表される。

したがって　$n=14x+5=14(9k+4)+5=126k+61$

$n<1000$ とすると　$126k+61<1000$　　よって　$k<\dfrac{313}{42}$　……④

④ を満たす最大の整数 k は　$k=7$

ゆえに，求める n は　$n=126\cdot7+61=943$

5．(1)　次の分数のうち，有限小数で表されるものをすべて選べ。

$\dfrac{7}{24}$，$\dfrac{9}{32}$，$\dfrac{5}{77}$，$\dfrac{1}{80}$

(2)　$\dfrac{30}{7}$ を小数で表したとき，小数第 100 位の数字を求めよ。

解答　(1)　$\dfrac{9}{32}$，$\dfrac{1}{80}$　　(2)　7

解説

(1)　4 つの分数はすべて既約分数である。

分母を素因数分解すると，それぞれ

$24=2^3\cdot3$，$32=2^5$，$77=7\cdot11$，$80=2^4\cdot5$

である。

有限小数は，分母の素因数が 2，5 だけからなるものを選んで

$\dfrac{9}{32}$，$\dfrac{1}{80}$

(2)　$\dfrac{30}{7}=4.285714\cdots\cdots=4.\dot{2}8571\dot{4}$

小数第 1 位から 285714 の 6 個の数字の並びが繰り返される。

$100=6\cdot16+4$ であるから，小数第 100 位の数字は 285714 の 4 番目の数字で　7

(2)

$$\begin{array}{r@{}l} & 4.285714\cdots \\ 7) & 30 \\ & 28 \\ \hline & \ \ 20 \\ & \ \ 14 \\ \hline & \ \ \ 60 \\ & \ \ \ 56 \\ \hline & \ \ \ \ 40 \\ & \ \ \ \ 35 \\ \hline & \ \ \ \ \ 50 \\ & \ \ \ \ \ 49 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ 10 \\ & \ \ \ \ \ \ \ 7 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ \ 30 \\ & \ \ \ \ \ \ \ 28 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ \ \ 2 \end{array}$$

6．(1)　次の数を 10 進法で表せ。

(ア)　$10011_{(2)}$　　(イ)　$1234_{(5)}$　　(ウ)　$634_{(7)}$

(2)　次の 10 進数を [ ] 内の表し方で表せ。

(ア)　39　[2 進法]　　(イ)　33　[3 進法]　　(ウ)　366　[5 進法]

解答　(1)　(ア)　19　　(イ)　194　　(ウ)　319

(2)　(ア)　$100111_{(2)}$　　(イ)　$1020_{(3)}$　　(ウ)　$2431_{(5)}$

解説

(1)　(ア)　$1\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0=16+2+1=19$

(イ)　$1\cdot5^3+2\cdot5^2+3\cdot5^1+4\cdot5^0=125+50+15+4=194$

(ウ)　$6\cdot7^2+3\cdot7^1+4\cdot7^0=294+21+4=319$

(2)　それぞれ下の計算から

(ア)　$100111_{(2)}$　　(イ)　$1020_{(3)}$　　(ウ)　$2431_{(5)}$

(ア)
$$\begin{array}{r@{\,)\,}rl} 2 & \underline{39} & \\ 2 & \underline{19} & \cdots 1 \\ 2 & \underline{9} & \cdots 1 \\ 2 & \underline{4} & \cdots 1 \\ 2 & \underline{2} & \cdots 0 \\ 2 & \underline{1} & \cdots 0 \\ \multicolumn{2}{r}{0} & \cdots 1 \end{array}$$

(イ)
$$\begin{array}{r@{\,)\,}rl} 3 & \underline{33} & \\ 3 & \underline{11} & \cdots 0 \\ 3 & \underline{3} & \cdots 2 \\ 3 & \underline{1} & \cdots 0 \\ \multicolumn{2}{r}{0} & \cdots 1 \end{array}$$

(ウ)
$$\begin{array}{r@{\,)\,}rl} 5 & \underline{366} & \\ 5 & \underline{73} & \cdots 1 \\ 5 & \underline{14} & \cdots 3 \\ 5 & \underline{2} & \cdots 4 \\ \multicolumn{2}{r}{0} & \cdots 2 \end{array}$$

7．(1)　$0.1011_{(2)}$ を 10 進法の小数で表せ。

(2)　10 進数 0.375 を　(ア)　2 進法　(イ)　5 進法　で表せ。

解答　(1)　0.6875　　(2)　(ア)　$0.011_{(2)}$　　(イ)　$0.\dot{1}\dot{4}_{(5)}$

解説

(1)　$0.1011_{(2)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{0}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{2^3+2+1}{2^4}=\dfrac{11}{16}=0.6875$

(2) (ア) 0.375 に 2 を掛け，小数部分に 2 を掛けることを繰り返すと，右のようになる。
出てきた整数部分は順に 0，1，1 であるから　　$0.011_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 0.375 \\ \times \quad\ 2 \\ \hline \underline{0}.75 \\ \times \quad\ 2 \\ \hline \underline{1}.5 \\ \times \quad\ 2 \\ \hline \underline{1}.0 \end{array}$$

(イ) 0.375 に 5 を掛け，小数部分に 5 を掛けることを繰り返すと，右のようになって，同じ計算が繰り返される。
よって　　$0.\dot{1}\dot{4}_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 0.375 \\ \times \quad\ 5 \\ \hline \underline{1}.875 \\ \times \quad\ 5 \\ \hline \underline{4}.375 \\ \times \quad\ 5 \\ \hline \underline{1}.875 \\ \times \quad\ 5 \\ \hline \underline{4}.375 \\ \times \quad\ 5 \\ \hline \cdots\cdots \end{array}$$

8．次の計算を 2 進数のまま行い，結果も 2 進法で表せ。
(1) $1110_{(2)}+1011_{(2)}$　　　　(2) $11001_{(2)}-1010_{(2)}$

解答　(1) $11001_{(2)}$　　(2) $1111_{(2)}$

解説
(1) $1110_{(2)}+1011_{(2)}=11001_{(2)}$

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ + & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

(2) $11001_{(2)}-1010_{(2)}=1111_{(2)}$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ - & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

参考　10 進法に直して和・差を計算し，その結果を 2 進法に直す方針で計算すると，右のようになる。

(1)
$$\begin{array}{rl} 14 & =1110_{(2)} \\ +\ 11 & =1011_{(2)} \\ \hline 25 & =11001_{(2)} \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rl} 25 & =11001_{(2)} \\ -\ 10 & =1010_{(2)} \\ \hline 15 & =1111_{(2)} \end{array}$$

9．(1) 自然数 N を 7 進法と 5 進法で表すと，ともに 3 桁の数であり，各位の数の並びが逆になるという。N を 10 進法で表せ。
(2) n は 3 以上の自然数とする。2 進数 $11010_{(2)}$ を n 進法で表すと $222_{(n)}$ となるような n の値を求めよ。

解答　(1) $N=51,\ 102$　　(2) $n=3$

解説
(1) $N=abc_{(7)}$ とすると，条件から　　$N=cba_{(5)}$
ゆえに　　$abc_{(7)}=cba_{(5)}$　……①
ここで，$a\fallingdotseq 0$，$c\fallingdotseq 0$ であるから
$1\leqq a\leqq 4$，$0\leqq b\leqq 4$，$1\leqq c\leqq 4$　……②
① から　　$a\cdot 7^2+b\cdot 7+c=c\cdot 5^2+b\cdot 5+a$
よって　　$48a+2b-24c=0$　　　ゆえに　　$b=12(c-2a)$
よって，b は 12 の倍数であるから，② より　　$b=0$
ゆえに　　$0=12(c-2a)$　　　よって　　$c=2a$　……③
② の範囲で ③ を満たす a，c の組は　　$(a,\ c)=(1,\ 2),\ (2,\ 4)$
$(a,\ c)=(1,\ 2)$ のとき　　$N=1\cdot 7^2+0\cdot 7^1+2\cdot 7^0=51$
$(a,\ c)=(2,\ 4)$ のとき　　$N=2\cdot 7^2+0\cdot 7^1+4\cdot 7^0=102$
したがって　　$N=51,\ 102$
(2) $11010_{(2)}=1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0=26$
$222_{(n)}=2\cdot n^2+2\cdot n^1+2\cdot n^0=2n^2+2n+2$
ゆえに　　$26=2n^2+2n+2$　すなわち　$n^2+n-12=0$
よって　　$(n-3)(n+4)=0$
n は 3 以上の自然数であるから　　$n=3$

10．(1) 2 進法で表すと 7 桁となるような自然数 N は何個あるか。
(2) 8 進法で表すと 5 桁となる自然数 N を 2 進法で表すと，何桁の数になるか。

解答　(1) 64 個　　(2) 13 桁，14 桁，15 桁

解説
(1) N は 2 進法で表すと 7 桁となる自然数であるから
$2^{7-1}\leqq N<2^7$　すなわち　$2^6\leqq N<2^7$
この不等式を満たす自然数 N の個数は
$2^7-2^6=2^6(2-1)=2^6=64$（個）
別解　2 進法で表すと，7 桁となる数は，$1\square\square\square\square\square\square_{(2)}$ の □ に 0 または 1 を入れた数であるから，この場合の数を考えて　　$2^6=64$（個）
(2) N は 8 進法で表すと 5 桁となる自然数であるから
$8^{5-1}\leqq N<8^5$　すなわち　$8^4\leqq N<8^5$
よって　　$(2^3)^4\leqq N<(2^3)^5$　　　ゆえに　　$2^{12}\leqq N<2^{15}$
この不等式を満たす N は
$2^{12}\leqq N<2^{13}$ のとき　13 桁，$2^{13}\leqq N<2^{14}$ のとき　14 桁，
$2^{14}\leqq N<2^{15}$ のとき　15 桁