数学演習（整数の性質）Ｈ２９．１２．１６　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．a，b は整数とする。次のことを証明せよ。

(1)　a，b が 5 の倍数ならば，$a+b$，$2a-3b$ は 5 の倍数である。

(2)　a，b が 3 の倍数ならば，a^2+b^2 は 9 の倍数である。

(3)　a，$3a+b$ が 7 の倍数ならば，b は 7 の倍数である。

２．(1)　4 桁の自然数 4□31 が 3 の倍数であるとき，百の位の数を求めよ。

(2)　3 桁の自然数 □1□ は 4 の倍数であり，かつ 9 の倍数である。このような整数のうち，最小のものを求めよ。

３．(1)　$\sqrt{600n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

(2)　$\sqrt{\dfrac{72}{n}}$ が自然数になるような自然数 n をすべて求めよ。

４．(1)　720 の正の約数の個数を求めよ。

(2)　自然数 N を素因数分解すると，素因数には 2 と 3 があり，それ以外の素因数はない。また，N の正の約数はちょうど 10 個あるという。このような自然数 N をすべて求めよ。

５．次の整数の組について，最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1)　70，525　　(2)　90，126，180

６．n と 36 の最小公倍数が 720 となる自然数 n をすべて求めよ。

７．a は自然数とする。$a+2$ が 7 の倍数であり，$a+3$ が 3 の倍数であるとき，$a+9$ は21 の倍数であることを証明せよ。

８．(1)　90 と自然数 n の最大公約数が 15，最小公倍数が 3150 であるという。n を求めよ。

(2)　最大公約数が 3，最小公倍数が 210，和が 51 である 2 つの自然数を求めよ。

９．a は整数とする。縦 2 m 40 cm，横 3 m 72 cmの長方形の床に，1 辺の長さが a cm の大きさの正方形のタイルをすき間なく敷き詰めたい。このときの a の最大値を求めよ。また，このとき敷き詰められるタイルの枚数を求めよ。

10. a，b は整数とする。a を 8 で割ると 3 余り，b を 8 で割ると 6 余る。このとき，次の数を 8 で割った余りを求めよ。

(1)　$a+b$　　(2)　$a-b$　　(3)　ab　　(4)　a^2

11. (1)　連続する 3 つの整数の積は 6 の倍数であることを証明せよ。

(2)　n は整数とする。n^3-n は 6 の倍数であることを証明せよ。

12. (1)　$10!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot10$ を計算した結果は，2 で最大何回割り切れるか。

(2)　$10!$ を計算すると，末尾に 0 は連続して何個並ぶか。

13. n を整数とするとき，次のことを証明せよ。

(1)　n^2+5n+1 を 2 で割った余りは 1 である。

(2)　$n(n+1)(5n+1)$ は 3 の倍数である。

14. (1)　整数 a，b を 5 で割った余りをそれぞれ r，r' とするとき，ab を 5 で割った余りは rr' を 5 で割った余りに等しいことを証明せよ。

(2)　(1) の結果を利用して，7^2，7^3，7^4 を 5 で割った余りを求めよ。

(3)　7^{2017} を 5 で割った余りを求めよ。

15. (1)　合同式を利用して，次のものを求めよ。

（ア）　7^{100} を 6 で割った余り　　（イ）　19^{19} の一の位の数

(2)　整数 n に対し n^6+1 は 3 で割り切れないことを，合同式を利用して証明せよ。

16. (1)　n は整数とする。$(n-4)(n+8)$ が素数となるような n をすべて求めよ。

(2)　a，b は異なる自然数とするとき，$ab=p$ …… ①，$a+b=q$ …… ② をともに満たす素数 p，q を求めよ。

数学演習（整数の性質）Ｈ２９．１２．１６　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．a，b は整数とする。次のことを証明せよ。

(1)　a，b が 5 の倍数ならば，$a+b$，$2a-3b$ は 5 の倍数である。

(2)　a，b が 3 の倍数ならば，a^2+b^2 は 9 の倍数である。

(3)　a，$3a+b$ が 7 の倍数ならば，b は 7 の倍数である。

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

k，l は整数とする。

(1)　$a=5k$，$b=5l$ と表されるから

$a+b=5k+5l=5(k+l)$，　$2a-3b=2\cdot5k-3\cdot5l=5(2k-3l)$

$k+l$，$2k-3l$ は整数であるから，$a+b$，$2a-3b$ は 5の倍数である。

(2)　$a=3k$，$b=3l$ と表されるから

$a^2+b^2=(3k)^2+(3l)^2=9k^2+9l^2=9(k^2+l^2)$

k^2+l^2 は整数であるから，a^2+b^2 は 9 の倍数である。

(3)　$a=7k$，$3a+b=7l$ と表されるから

$b=7l-3a=7l-3\cdot7k=7(l-3k)$

$l-3k$ は整数であるから，b は 7 の倍数である。

2．(1)　4 桁の自然数 4□31 が 3 の倍数であるとき，百の位の数を求めよ。

(2)　3 桁の自然数 □1□ は 4 の倍数であり，かつ 9 の倍数である。このような整数のうち，最小のものを求めよ。

解答　(1)　1，4，7　　(2)　216

解説

(1)　百の位の数を a（a は整数，$0\leqq a\leqq9$）とすると，各位の数の和は

$4+a+3+1=a+8$

$a=0$，1，2，……，9 のうち，$a+8$ が 3 の倍数になるものを選んで

$a=1$，4，7

(2)　4 の倍数であるから，下 2 桁は 4 の倍数である。

よって，一の位の数は　2 または 6

百の位の数を a（a は整数，$1\leqq a\leqq9$）とする。

[1]　一の位の数が 2 のとき，各位の数の和は

$a+1+2=a+3$

$a+3$ が 9 の倍数となるから　$a=6$

[2]　一の位の数が 6 のとき，各位の数の和は

$a+1+6=a+7$

$a+7$ が 9 の倍数となるから　$a=2$

[1]，[2] のうち，a の値が小さい方が求める整数で　216

3．(1)　$\sqrt{600n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

(2)　$\sqrt{\dfrac{72}{n}}$ が自然数になるような自然数 n をすべて求めよ。

解答　(1)　$n=6$　　(2)　$n=2$，8，18，72

解説

(1)　$\sqrt{600n}$ が自然数になるのは，$600n$ が平方数になるときである。

600 を素因数分解すると　$600=2^3\cdot3\cdot5^2$

600 に $2\cdot3$ を掛けると　$2^4\cdot3^2\cdot5^2=(2^2\cdot3\cdot5)^2$

よって，求める自然数 n は　$n=2\cdot3=6$

2) 600
2) 300
2) 150
3) 75
5) 25
5

(2)　$\sqrt{\dfrac{72}{n}}$ が自然数になるのは，$\dfrac{72}{n}$ が平方数になるときである。

72 を素因数分解すると　$72=2^3\cdot3^2$

72 を $2^1=2$ で割ると　$2^2\cdot3^2=(2\cdot3)^2$

72 を $2^3=8$ で割ると　3^2

72 を $2^1\cdot3^2=18$ で割ると　2^2

72 を $2^3\cdot3^2=72$ で割ると　$1=1^2$

よって，求める自然数 n は　$n=2$，8，18，72

2) 72
2) 36
2) 18
3) 9
3

4．(1)　720 の正の約数の個数を求めよ。

(2)　自然数 N を素因数分解すると，素因数には 2 と 3 があり，それ以外の素因数はない。また，N の正の約数はちょうど 10 個あるという。このような自然数 N をすべて求めよ。

解答　(1)　30　　(2)　$N=162$，48

解説

(1)　$720=2^4\cdot3^2\cdot5$ であるから，求める正の約数の個数は

$(4+1)(2+1)(1+1)=30$（個）

(2)　条件から，a，b を自然数として $N=2^a\cdot3^b$ と表され，N の正の約数が 10 個であることから

$(a+1)(b+1)=10$

が成り立つ。

$a+1$，$b+1$ はともに 2 以上の自然数であり，10 を 2 以上の 2 つの整数の積で表すとすると $10=2\cdot5$ しかない。

ゆえに　$a+1=2$，$b+1=5$　または　$a+1=5$，$b+1=2$

よって　$a=1$，$b=4$　または　$a=4$，$b=1$

したがって，求める自然数 N は　$N=2^1\cdot3^4$，$2^4\cdot3^1$

すなわち　$N=162$，48

2) 720
2) 360
2) 180
2) 90
3) 45
3) 15
5

5．次の整数の組について，最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1)　70，525　　　　(2)　90，126，180

解答　(1)　最大公約数 35，最小公倍数 1050　　(2)　最大公約数 18，最小公倍数 1260

解説

(1)　素因数分解すると

$70=2\cdot5\cdot7$

$525=3\cdot5^2\cdot7$

最大公約数は　$5\cdot7=35$

最小公倍数は　$2\cdot3\cdot5^2\cdot7=1050$

2) 70
5) 35
7

3) 525
5) 175
5) 35
7

(2)　素因数分解すると

$90=2\cdot3^2\cdot5$

$126=2\cdot3^2\cdot7$

$180=2^2\cdot3^2\cdot5$

最大公約数は　$2\cdot3^2=18$

最小公倍数は　$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7=1260$

2) 90
3) 45
3) 15
5

2) 126
3) 63
3) 21
7

2) 180
2) 90
3) 45
3) 15
5

別解　(1)　70 と 525 に共通な素因数で割れるだけ割っていくと，右のようになる。

最大公約数は　$5\cdot7=35$

最小公倍数は　$35\cdot2\cdot15=1050$

5) 70　525
7) 14　105
2　15

(2)　90，126，180 に共通な素因数で割れるだけ割っていくと，右のようになる。

最大公約数は　$2\cdot3^2=18$

一番下の 3 数 5，7，10（$=2\cdot5$）の最小公倍数は $2\cdot5\cdot7=70$ であるから，求める最小公倍数は

$18\cdot70=1260$

2) 90　126　180
3) 45　63　90
3) 15　21　30
5　7　10

6．n と 36 の最小公倍数が 720 となる自然数 n をすべて求めよ。

解答　$n=80$，240，720

解説

36，720 を素因数分解すると

$36=2^2\cdot3^2$，$720=2^4\cdot3^2\cdot5$

よって，36 との最小公倍数が 720 である自然数は

$2^4\cdot3^a\cdot5$　（$a=0$，1，2）

と表される。したがって，求める自然数 n は

$n=2^4\cdot5$，$2^4\cdot3^1\cdot5$，$2^4\cdot3^2\cdot5$

すなわち　$n=80$，240，720

7．a は自然数とする。$a+2$ が 7 の倍数であり，$a+3$ が 3 の倍数であるとき，$a+9$ は21 の倍数であることを証明せよ。

解答　略

解説

$a+2$，$a+3$ は自然数 k，l を用いて

$a+2=7k$，　$a+3=3l$　　と表される。

$a+9=(a+2)+7=7k+7=7(k+1)$　……①

また　$a+9=(a+3)+6=3l+6=3(l+2)$　……②

よって，① より $a+9$ は 7 の倍数であり，② より $a+9$ は 3 の倍数でもある。

7 と 3 は互いに素であるから，$a+9$ は $7\cdot3$ の倍数すなわち 21 の倍数である。

別解　①，② から　$7(k+1)=3(l+2)$

よって，$7(k+1)$ は 3 の倍数であるが，7 と 3 は互いに素であるから，$k+1=3m$（m は整数）と表される。

ゆえに　$a+9=7\cdot3m=21m$

よって，$a+9$ は 21 の倍数である。

8．(1)　90 と自然数 n の最大公約数が 15，最小公倍数が 3150 であるという。n を求めよ。

(2)　最大公約数が 3，最小公倍数が 210，和が 51 である 2 つの自然数を求めよ。

解答　(1)　$n=525$　　(2)　21，30

解説

(1)　条件から　　$90n=15\cdot 3150$

したがって　　$n=\dfrac{15\cdot 3150}{90}=525$

(2)　求める 2 つの自然数を $3m$，$3n$ とする。

ただし，m，n は互いに素な自然数で　　$m<n$

条件から　　$210=3mn$，　$3m+3n=51$

すなわち　　$mn=70$ ……①，$m+n=17$ ……②

① および $m<n$ を満たす互いに素である m，n の組は

$(m,\ n)=(1,\ 70),\ (2,\ 35),\ (5,\ 14),\ (7,\ 10)$

このうち，② を満たすのは $(m,\ n)=(7,\ 10)$ のみである。

したがって，求める 2 数は　　21，30

別解　② から　　$n=17-m$

これを ① に代入して整理すると　　$m^2-17m+70=0$

よって　　$(m-7)(m-10)=0$　　　ゆえに　　$m=7,\ 10$

よって　　$(m,\ n)=(7,\ 10),\ (10,\ 7)$

$m<n$ であるから，$(m,\ n)=(7,\ 10)$ のみが適する。

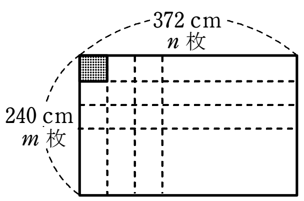
したがって，求める 2 数は　　21，30

9．a は整数とする。縦 2 m 40 cm，横 3 m 72 cmの長方形の床に，1 辺の長さが a cm の大きさの正方形のタイルをすき間なく敷き詰めたい。このときの a の最大値を求めよ。また，このとき敷き詰められるタイルの枚数を求めよ。

解答　$a=12$，620 枚

解説

2 m 40 cm＝240 cm，3 m 72 cm＝372 cm



1 辺の長さが a cmの 正方形のタイルを，縦に m 枚，横に n 枚並べるとすると

$240=am$，　$372=an$　……①

すなわち a は，240 と 372 の公約数である。

ゆえに，a の最大値は 240 と 372 の最大公約数である。　$240=2^4\cdot 3\cdot 5$，　$372=2^2\cdot 3\cdot 31$

であるから，240 と 372 の最大公約数は　　$2^2\cdot 3=12$

よって，求める a の最大値は　　$a=12$

このとき，① から　　$m=20$，$n=31$

したがって，求めるタイルの枚数は　　$mn=20\cdot 31=620$ (枚)

10．a，b は整数とする。a を 8 で割ると 3 余り，b を 8 で割ると 6 余る。このとき，次の数を 8 で割った余りを求めよ。

(1)　$a+b$　　　(2)　$a-b$　　　(3)　ab　　　(4)　a^2

解答　(1)　1　　(2)　5　　(3)　2　　(4)　1

解説

a，b は整数 k，l を用いて $a=8k+3$，$b=8l+6$ と表される。

(1)　$a+b=(8k+3)+(8l+6)=8(k+l)+9$

$=8(k+l+1)+1$

よって，$a+b$ を 8 で割った余りは　1

(2)　$a-b=(8k+3)-(8l+6)=8(k-l)-3$

$=8(k-l-1)+5$

よって，$a-b$ を 8 で割った余りは　5

(3)　$ab=(8k+3)(8l+6)=8^2kl+8k\cdot 6+3\cdot 8l+3\cdot 6$

$=8(8kl+6k+3l+2)+2$

よって，ab を 8 で割った余りは　2

(4)　$a^2=(8k+3)^2=8^2k^2+2\cdot 8k\cdot 3+3^2$

$=8(8k^2+6k+1)+1$

よって，a^2 を 8 で割った余りは　1

別解　(1)　求める余りは $3+6=9$ を 8 で割った余りと同じで　1

(2)　求める余りは $3-6=-3$ を 8 で割った余りと同じで　5

(3)　求める余りは $3\cdot 6=18$ を 8 で割った余りと同じで　2

(4)　求める余りは $3^2=9$ を 8 で割った余りと同じで　1

11．(1)　連続する 3 つの整数の積は 6 の倍数であることを証明せよ。

(2)　n は整数とする。 n^3-n は 6 の倍数であることを証明せよ。

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　連続する 3 つの整数は，整数 k を用いて k，$k+1$，$k+2$ と表される。

連続する整数では 3 の倍数は 2 つおきに必ず現れるから，連続する 3 つの整数には 3 の倍数が必ず 1 つ存在する。

よって，積 $k(k+1)(k+2)$ は 3 の倍数である。……①

また，積 $k(k+1)(k+2)$ は連続する 2 つの整数の積を含んでいるから

2 の倍数である。……②

①，② より，連続する 3 つの整数の積 $k(k+1)(k+2)$ は 3 の倍数かつ 2 の倍数であるから，6 の倍数である。

(2)　$n^3-n=n(n^2-1)=n(n+1)(n-1)=(n-1)n(n+1)$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積であるから，(2) より n^3-n は 6 の倍数である。

12．(1)　$10!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot 10$ を計算した結果は，2 で最大何回割り切れるか。

(2)　10! を計算すると，末尾に 0 は連続して何個並ぶか。

解答　(1)　8 回　　(2)　2 個

解説

(1)　10! が 2 で割り切れる最大の回数は，10! を素因数分解したときの素因数 2 の個数に一致する。

1 から 10 までの自然数のうち，

2 の倍数の個数は，10 を 2 で割った商で　　5 個

2^2 の倍数の個数は，10 を 2^2 で割った商で　　2 個

2^3 の倍数の個数は，10 を 2^3 で割った商で　　1 個

よって，素因数 2 の個数は　　$5+2+1=8$ (個)

ゆえに，10! は 2 で最大 8 回割り切れる。

(2)　10! を整数で表したときに末尾に並ぶ 0 の個数は，10! を素因数分解したときの素因数 5 の個数に一致する。

1 から 10 までの自然数のうち，5 の倍数の個数は，10 を 5 で割った商で　　2 個

よって，10! を整数で表したとき，末尾に 0 は 2 個並ぶ。

13．n を整数とするとき，次のことを証明せよ。

(1)　n^2+5n+1 を 2 で割った余りは 1 である。

(2)　$n(n+1)(5n+1)$ は 3 の倍数である。

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　整数 n は 整数k を用いて $2k$，$2k+1$ のいずれかの形に表される。

[1]　$n=2k$ のとき

$n^2+5n+1=(2k)^2+5\cdot 2k+1=2(2k^2+5k)+1$

[2]　$n=2k+1$ のとき

$n^2+5n+1=(2k+1)^2+5(2k+1)+1$

$=4k^2+14k+7=2(2k^2+7k+3)+1$

[1]，[2] から，n^2+5n+1 を 2 で割った余りは 1 である。

(2)　整数 n は 整数k を用いて $3k$，$3k+1$，$3k+2$ のいずれかの形に表される。

[1]　$n=3k$ のとき

$n(n+1)(5n+1)=3k(3k+1)(15k+1)=3\cdot k(3k+1)(15k+1)$

[2]　$n=3k+1$ のとき

$n(n+1)(5n+1)=(3k+1)(3k+2)(15k+5+1)$

$=3\cdot(3k+1)(3k+2)(5k+2)$

[3]　$n=3k+2$ のとき

$n(n+1)(5n+1)=(3k+2)(3k+2+1)(15k+10+1)$

$=3\cdot(3k+2)(k+1)(15k+11)$

[1]～[3] から，$n(n+1)(5n+1)$ は 3 の倍数である。

14．(1)　整数 a，b を 5 で割った余りをそれぞれ r，r' とするとき，ab を 5 で割った余りは rr' を 5 で割った余りに等しいことを証明せよ。

(2)　(1) の結果を利用して，7^2，7^3，7^4 を 5 で割った余りを求めよ。

(3)　7^{2017} を 5 で割った余りを求めよ。

解答　(1)　略　　(2)　順に 4，3，1　　(3)　2

解説

(1)　条件から，$a=5q+r$，$b=5q'+r'$ (q，q' は整数) と表される。

よって　　$ab=(5q+r)(5q'+r')=5(5qq'+qr'+q'r)+rr'$

ゆえに，ab を 5 で割った余りは rr' を 5 で割った余りに等しい。

(2)　7 を 5 で割った余りは 2 であるから，

$7^2=7\cdot 7$ を 5 で割った余りは，$2\cdot 2$ を 5 で割った余り 4 に等しい。

$7^3=7\cdot 7^2$ を 5 で割った余りは，$2\cdot 4$ を 5 で割った余り 3 に等しい。

$7^4=7\cdot 7^3$ を 5 で割った余りは，$2\cdot 3$ を 5 で割った余り 1 に等しい。

(3)　$2017=4\times 504+1$ であるから　　$7^{2107}=(7^4)^{504}\cdot 7$

よって，7^{2017} を 5 で割った余りは $1^{504}\cdot 7=7$ を 5 で割った余り 2 に等しい。

15．(1)　合同式を利用して，次のものを求めよ。

(ア)　7^{100} を 6 で割った余り　　　　(イ)　19^{19} の一の位の数

(2)　整数 n に対し n^6+1 は 3 で割り切れないことを，合同式を利用して証明せよ。

解答　(1)　(ア)　1　　(イ)　9　　(2)　略

解説

(1)　(ア)　$7\equiv 1 \pmod 6$ であるから

$7^{100}\equiv 1^{100}\equiv 1 \pmod 6$

したがって，7^{100} を 6 で割った余りは　　1

(イ)　$19\equiv 9 \pmod{10}$ であり　　$19^2\equiv 9^2\equiv 81\equiv 1 \pmod{10}$

$19=2\cdot 9+1$ から　　$19^{19}\equiv (19^2)^9\cdot 19\equiv 1^9\cdot 9\equiv 9 \pmod{10}$

したがって，19^{19} の一の位の数は　　9

(2)　自然数 n に対して，$n\equiv 0 \pmod 3$，$n\equiv 1 \pmod 3$，$n\equiv 2 \pmod 3$ のいずれかが成り立つ。

[1]　$n\equiv 0 \pmod 3$ のとき　　$n^6\equiv 0^6\equiv 0 \pmod 3$

よって　　$n^6+1\equiv 0+1\equiv 1 \pmod 3$

[2]　$n\equiv 1 \pmod 3$ のとき　　$n^6\equiv 1^6\equiv 1 \pmod 3$

よって　　$n^6+1\equiv 1+1\equiv 2 \pmod 3$

[3]　$n\equiv 2 \pmod 3$ のとき　　$n^6\equiv 2^6\equiv 64\equiv 1 \pmod 3$

よって　　$n^6+1\equiv 1+1\equiv 2 \pmod 3$

[1]～[3] のいずれの場合も n^6+1 を 3 で割った余りが 0 にならないから，n^6+1 は 3 で割り切れない。

16. (1)　n は整数とする。$(n-4)(n+8)$ が素数となるような n をすべて求めよ。

(2)　a，b は異なる自然数とするとき，$ab=p$ …… ①，$a+b=q$ …… ② をともに満たす素数 p，q を求めよ。

解答　(1)　$n=5,\ -9$　　(2)　$p=2$，$q=3$

解説

(1)　$(n-4)(n+8)$ が素数となるとき，$n-4$ と $n+8$ の符号は一致する。

また　　$n-4<n+8$

[1]　$n-4>0$ かつ $n+8>0$ すなわち $n>4$ のとき

$n-4=1$　　　　よって　　$n=5$

このとき，$(n-4)(n+8)=1\cdot 13=13$ となり，適する。

[2]　$n-4<0$ かつ $n+8<0$ すなわち $n<-8$ のとき

$n+8=-1$　　　　よって　　$n=-9$

このとき，$(n-4)(n+8)=-13\cdot(-1)=13$ となり，適する。

したがって，求める n の値は　　$n=5,\ -9$

(2)　$a<b$ とすると，① から　　$a=1$，$b=p$

よって，② から　　$1+p=q$

ゆえに，$p<q$ で，p と q の偶奇は異なるが，偶数の素数は 2 だけであるから

$p=2$，$q=3$

$a>b$ のときも同様にして，$p=2$，$q=3$ が導かれる。