数学演習（最大公約数•最小公倍数）Ｈ２９．２．１　　(　)組(　)番　名前(　　　　)

$\boxed{1}$ (1)　百の位の数が 2 である 3 桁の自然数 A がある。A が 5 の倍数であり，3 の倍数であるとき，A を求めよ。

(2)　ある 2 桁の自然数 B を 9 倍して 45 を足すと，百の位が 8，十の位が 2 であるとき，B を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の 2 つの整数，3 つの整数の最大公約数と最小公倍数をそれぞれ求めよ。

(1)　168，378　　(2)　65，156，234

$\boxed{3}$ $\dfrac{34}{5}$，$\dfrac{51}{10}$，$\dfrac{85}{8}$ のいずれに掛けても積が自然数となる分数のうち，最も小さいものを求めよ。

$\boxed{4}$ 次の条件を満たす自然数 n を，それぞれすべて求めよ。

(1)　n と 16 の最小公倍数が 144 である。

(2)　n と 12 と 50 の最小公倍数が 1500 である。

$\boxed{5}$ a，b は整数とする。次のことを証明せよ。

(1)　a，b が 3 の倍数ならば，$a+b$，$3a-4b$ は 3 の倍数である。

(2)　a，b が 2 の倍数ならば，a^2+b^2 は 4 の倍数である。

(3)　a，$2a+b$ が 5 の倍数ならば，b は 5 の倍数である。

$\boxed{6}$ (1) 90 と自然数 n の最大公約数が 15，最小公倍数が 3150 であるとき，n の値を求めよ。

(2) 最大公約数が 12，最小公倍数が 420 である 2 つの自然数の組をすべて求めよ。

$\boxed{7}$ 3 つの正の整数 40，56，n の最大公約数が 8，最小公倍数が 1400 のとき，n の値を求めよ。

$\boxed{8}$ (1) 630 の正の約数の個数を求めよ。

(2) 自然数 N を素因数分解すると，素因数には p と 7 があり，これら以外の素因数はない。また，N の正の約数は 6 個，正の約数の総和は 104 である。素因数 p と自然数 N の値を求めよ。

$\boxed{9}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{360n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

(2) $\sqrt{n^2+8}$ が自然数 m になるような自然数 m と n の組み合わせを求めよ。

数学演習（最大公約数•最小公倍数）Ｈ２９．２．１　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ (1)　百の位の数が 2 である 3 桁の自然数 A がある。A が 5 の倍数であり，3 の倍数であるとき，A を求めよ。

(2)　ある 2 桁の自然数 B を 9 倍して 45 を足すと，百の位が 8，十の位が 2 であるとき，B を求めよ。

解答　(1)　$A=210,\ 240,\ 270,\ 225,\ 255,\ 285$　　(2)　$B=87$

解説

(1)　A の十の位，一の位の数をそれぞれ x，y とすると

A が 5 の倍数であるから　　$y=0$　または　$y=5$

A が 3 の倍数であるから　$2+x+y$ は 3 の倍数である。

よって　　$y=0$ のとき　$x=1,\ 4,\ 7$

　　　　　$y=5$ のとき　$x=2,\ 5,\ 8$

したがって　$A=210,\ 240,\ 270,\ 225,\ 255,\ 285$

(2)　B は 2 桁の自然数であるから　$10 \leqq B \leqq 99$

よって　　$9\cdot 10+45 \leqq 9B+45 \leqq 9\cdot 99+45$

すなわち　$135 \leqq 9B+45 \leqq 936$

ゆえに，$9B+45$ は 3 桁の自然数であり，$9B+45=9(B+5)$ より 9 の倍数である。

よって，$9B+45$ の一の位の数を x とすると，$8+2+x$　すなわち　$10+x$ は 9 の倍数である。

更に，$0 \leqq x \leqq 9$ であるから　$10 \leqq 10+x \leqq 19$

よって，$10+x=18$　すなわち　$x=8$ となり　$9B+45=828$

したがって　$B=(828-45)\div 9=87$

$\boxed{2}$ 次の 2 つの整数，3 つの整数の最大公約数と最小公倍数をそれぞれ求めよ。

(1)　168，378　　　　(2)　65，156，234

解答　(1)　最大公約数 42，最小公倍数 1512

　　　(2)　最大公約数 13，最小公倍数 2340

解説

(1)　右の計算から最大公約数は　$2\cdot 3\cdot 7=42$

最小公倍数は　$2\cdot 3\cdot 7\cdot 4\cdot 9=1512$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 168 & 378 \\ 3 & 84 & 189 \\ 7 & 28 & 63 \\ & 4 & 9 \end{array}$$

(2)　右の計算から最大公約数は　13

最小公倍数は　$13\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 2\cdot 3=2340$

$$\begin{array}{r|rrr} 13 & 65 & 156 & 234 \\ 2 & 5 & 12 & 18 \\ 3 & 5 & 6 & 9 \\ & 5 & 2 & 3 \end{array}$$

$\boxed{3}$ $\dfrac{34}{5}$，$\dfrac{51}{10}$，$\dfrac{85}{8}$ のいずれに掛けても積が自然数となる分数のうち，最も小さいものを求めよ。

解答　$\dfrac{40}{17}$

解説

求める分数を $\dfrac{b}{a}$ (a，b は互いに素である自然数) とする。

$\dfrac{34}{5}\times\dfrac{b}{a}$ は自然数となるから

　a は 34 の約数，b は 5 の倍数　……①

$\dfrac{51}{10}\times\dfrac{b}{a}$ は自然数となるから

　a は 51 の約数，b は 10 の倍数　……②

$\dfrac{85}{8}\times\dfrac{b}{a}$ は自然数となるから

　a は 85 の約数，b は 8 の倍数　……③

求める分数 $\dfrac{b}{a}$ を最小にするには，a を最大にし，b を最小にするとよい。

よって，①，②，③ から

　a は 34 と 51 と 85 の最大公約数，

　b は 5 と 10 と 8 の最小公倍数

とすればよい。

したがって　$a=17$，$b=40$

よって，求める分数は　$\dfrac{40}{17}$

$\boxed{4}$ 次の条件を満たす自然数 n を，それぞれすべて求めよ。

(1)　n と 16 の最小公倍数が 144 である。

(2)　n と 12 と 50 の最小公倍数が 1500 である。

解答　(1)　$n=9,\ 18,\ 36,\ 72,\ 144$　　(2)　$n=125,\ 250,\ 500,\ 375,\ 750,\ 1500$

解説

(1)　16 と 144 を素因数分解すると

$$16=2^4,\ 144=2^4\cdot 3^2$$

よって，16 との最小公倍数が 144 である自然数 n は

$$n=2^a\cdot 3^2\quad (a=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

と表される。

したがって，求める自然数 n は

$$n=2^0\cdot 3^2,\ 2^1\cdot 3^2,\ 2^2\cdot 3^2,\ 2^3\cdot 3^2,\ 2^4\cdot 3^2$$

すなわち　$n=9,\ 18,\ 36,\ 72,\ 144$

(2)　12，50，1500 を素因数分解すると

$$12=2^2\cdot 3,\ 50=2\cdot 5^2,\ 1500=2^2\cdot 3\cdot 5^3$$

よって，12，50 との最小公倍数が 1500 である自然数 n は

$$n=2^a\cdot 3^b\cdot 5^3\quad (a=0,\ 1,\ 2;\quad b=0,\ 1)$$

と表される。

したがって，求める自然数 n は

$$n=2^0\cdot 3^0\cdot 5^3,\ 2^1\cdot 3^0\cdot 5^3,\ 2^2\cdot 3^0\cdot 5^3,\ 2^0\cdot 3^1\cdot 5^3,\ 2^1\cdot 3^1\cdot 5^3,\ 2^2\cdot 3^1\cdot 5^3$$

すなわち　　$n=125,\ 250,\ 500,\ 375,\ 750,\ 1500$

$\boxed{5}$ a，b は整数とする。次のことを証明せよ。

(1)　a，b が 3 の倍数ならば，$a+b$，$3a-4b$ は 3 の倍数である。

(2)　a，b が 2 の倍数ならば，a^2+b^2 は 4 の倍数である。

(3)　a，$2a+b$ が 5 の倍数ならば，b は 5 の倍数である。

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

k，l は整数とする。

(1)　a，b は 3 の倍数であるから，$a=3k$，$b=3l$ と表される。

よって　　$a+b=3k+3l=3(k+l)$，

　　　　　$3a-4b=3\cdot 3k-4\cdot 3l=3(3k-4l)$

$k+l$，$3k-4l$ は整数であるから，$a+b$，$3a-4b$ は 3 の倍数である。

(2)　a，b は 2 の倍数であるから，$a=2k$，$b=2l$ と表される。

よって　　$a^2+b^2=(2k)^2+(2l)^2=4k^2+4l^2=4(k^2+l^2)$

k^2+l^2 は整数であるから，a^2+b^2 は 4 の倍数である。

(3)　a，$2a+b$ は 5 の倍数であるから，$a=5k$，$2a+b=5l$ と表される。

よって　　$b=5l-2a=5l-2\cdot 5k=5(l-2k)$

$l-2k$ は整数であるから，b は 5 の倍数である。

$\boxed{6}$ (1) 90 と自然数 n の最大公約数が 15，最小公倍数が 3150 であるとき，n の値を求めよ。

(2) 最大公約数が 12，最小公倍数が 420 である 2 つの自然数の組をすべて求めよ。

解答 (1) $n=525$ (2) $(12,\ 420)$，$(60,\ 84)$

解説

(1) 条件から $90n=15\cdot3150$

これを解いて $n=\dfrac{15\cdot3150}{90}=525$

(2) 2 つの自然数を a，b とすると，最大公約数が 12 であるから，

$a=12a'$，$b=12b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である。

このとき，a，b の最小公倍数は $12a'b'$ と表されるから

$12a'b'=420$ すなわち $a'b'=35$

$a'b'=35$ を満たし，互いに素である a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 35)$，$(5,\ 7)$，$(7,\ 5)$，$(35,\ 1)$

よって $(a,\ b)=(12,\ 420)$，$(60,\ 84)$，$(84,\ 60)$，$(420,\ 12)$

したがって，求める 2 つの自然数の組は

$(12,\ 420)$，$(60,\ 84)$

$\boxed{7}$ 3 つの正の整数 40，56，n の最大公約数が 8，最小公倍数が 1400 のとき，n の値を求めよ。

解答 $n=200$，1400

解説

最大公約数が 8 であるから，$n=8n'$ (n' は正の整数) と表される。

$40=8\cdot5$，$56=8\cdot7$，$n=8n'$ の最小公倍数が $1400=8\cdot5^2\cdot7$ であるから，5，7，n' の最小公倍数が $5^2\cdot7$ である。

ゆえに $n'=5^2$，$5^2\cdot7$

したがって $n=8\cdot5^2$，$8\cdot5^2\cdot7$ すなわち $n=200$，1400

$\boxed{8}$ (1) 630 の正の約数の個数を求めよ。

(2) 自然数 N を素因数分解すると，素因数には p と 7 があり，これら以外の素因数はない。また，N の正の約数は 6 個，正の約数の総和は 104 である。素因数 p と自然数 N の値を求めよ。

解答 (1) 24 (2) $p=3$，$N=63$

解説

(1) $630=2\cdot3^2\cdot5\cdot7$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 630 \\ \hline 3 & 315 \\ \hline 3 & 105 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline & 7 \end{array}$$

よって，求める正の約数の個数は

$(1+1)(2+1)(1+1)(1+1)=2\cdot3\cdot2\cdot2$

$=24$ (個)

(2) N の素因数には p と 7 以外はないから，a，b を自然数として $N=p^a\cdot7^b$ と表される。

N の正の約数が 6 個あるから $(a+1)(b+1)=6$

[1] $a+1=2$，$b+1=3$ すなわち $a=1$，$b=2$ のとき

正の約数の総和が 104 であるから $(1+p)(1+7+7^2)=104$

これを解くと $p=\dfrac{47}{57}$ これは素数でないから不適。

[2] $a+1=3$，$b+1=2$ すなわち $a=2$，$b=1$ のとき

$(1+p+p^2)(1+7)=104$ 整理すると $p^2+p-12=0$

これを解くと $p=-4$，3 適するのは $p=3$

このとき $N=3^2\cdot7^1=63$

$\boxed{9}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{360n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

(2) $\sqrt{n^2+8}$ が自然数 m になるような自然数 m と n の組み合わせを求めよ。

解答 (1) $n=10$ (2) $m=3$，$n=1$

解説

(1) $\sqrt{360n}$ が自然数になるには，$360n$ がある自然数の 2 乗になればよい。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 360 \\ \hline 2 & 180 \\ \hline 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

360 を素因数分解すると $360=2^3\cdot3^2\cdot5$

360 に $2\cdot5$ を掛けると，$2^4\cdot3^2\cdot5^2$

すなわち $(2^2\cdot3\cdot5)^2$ になる。

よって，求める自然数 n は $n=2\cdot5=10$

(2) $\sqrt{n^2+8}=m$ (m は自然数) とおくと $n^2+8=m^2$

よって $m^2-n^2=8$

ゆえに $(m+n)(m-n)=8$ …… ①

m，n は自然数であるから，$m+n$，$m-n$ は 8 の約数である。

$1\leqq m-n<m+n\leqq8$ に注意すると，① から

$\begin{cases} m+n=8 \\ m-n=1 \end{cases}$ …… ② または $\begin{cases} m+n=4 \\ m-n=2 \end{cases}$ …… ③

② を解くと $m=\dfrac{9}{2}$，$n=\dfrac{7}{2}$ これらは自然数でないから不適。

③ を解くと $m=3$，$n=1$ これらは自然数であるから適する。