数学演習（整数の性質）Ｈ２４．１２．２０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．(1)　分数 $\dfrac{5}{26}$ を小数で表したとき，小数第 100 位の数字を求めよ。

(2)　n は 2 桁の自然数とする。$\dfrac{23}{n}$ を小数で表したとき，循環小数となるような n は何個あるか。

2．(1)　10 進数 28 を，2 進法と 3 進法で表せ。

(2)　10 進数 0.248 を，5 進法で表せ。

3．次の足し算，引き算の結果を，[　]内の表し方で表せ。

(1)　$10010_{(2)}+10111_{(2)}$　[2 進法]　　(2)　$1343_{(5)}+234_{(5)}$　[5 進法]

(3)　$101101_{(2)}-11011_{(2)}$　[2 進法]　　(4)　$3425_{(7)}-1346_{(7)}$　[7 進法]

4．(1)　10 進法で表された正の整数を 8 進法に直すと 3 桁の数 $abc_{(8)}$ となり，7 進法に直すと 3 桁の数 $cba_{(7)}$ となるとする。この数を 10 進法で書け。

(2)　4 進法で表すと 5 桁となるような自然数は何個あるか。

5．(1)　47^{2015} を 10 進法で表すとき，一の位の数字を求めよ。

(2)　13^{15} を 5 進法で表すとき，一の位の数字を求めよ。

6．次の掛け算，割り算の結果を，2 進法で表せ。

(1)　$10111_{(2)}\times1011_{(2)}$　　(2)　$11000011_{(2)}\div1101_{(2)}$

7．(1)　$21201_{(3)}+623_{(7)}$ を計算し，5 進数で答えよ。

(2)　$\dfrac{3}{8}$ を 2 進法，3 進法の小数でそれぞれ表せ。

8．0，1，2，3，4 の 5 種類の数字を用いて 1 以上の整数を作り，小さい順に並べる。

1，2，3，4，10，11，12，13，14，20，21，22，……

(1)　2001 は何番目の数であるか。

(2)　2001 番目の数を求めよ。

9．8 進法で表すと 3 桁になる整数を，2 進法で表すと何桁の数になるか。考えられる桁数をすべて求めよ。

10．(1)　自然数のうち，10 進法で表しても 5 進法で表しても 3 桁になるものは全部で何個あるか。

(2)　自然数のうち，10 進法で表しても 5 進法で表しても，ともに 4 桁になるものは存在しないことを示せ。

11．(1)　ある自然数 m を 8 進法で表すと 2525 になる。m の 2 倍を 8 進法で表せ。

(2)　ある自然数とその 2 倍の数をそれぞれ 8 進法で表したとき，ともに 4 桁で，数字の並び方は逆になっているという。このような自然数をすべて求め，それらを 8 進法で表せ。

1．(1)　分数 $\dfrac{5}{26}$ を小数で表したとき，小数第 100 位の数字を求めよ。

(2)　n は 2 桁の自然数とする。$\dfrac{23}{n}$ を小数で表したとき，循環小数となるような n は何個あるか。

解答　(1)　3　(2)　78 個

解説

(1)　$\dfrac{5}{26}=0.19230769\cdots\cdots=0.1\dot{9}2307\dot{6}$

よって，小数第 2 位以下で 923076 の 6 個の数字が循環する。

$100=1+6\cdot16+3$

であるから，小数第 100 位の数字は 923076 の 3 番目の数字で 3 である。

(2)　2 桁の自然数は全部で 90 個ある。

このうち，$\dfrac{23}{n}$ が整数となるのは，$n=23$ のみである。

また，n の素因数が 2，5 だけからなるとき，$\dfrac{23}{n}$ は有限小数となる。このような 2 桁の n は

$2^4\cdot5^0=16$，$2^5\cdot5^0=32$，$2^6\cdot5^0=64$，

$2^1\cdot5^1=10$，$2^2\cdot5^1=20$，$2^3\cdot5^1=40$，$2^4\cdot5^1=80$，

$2^0\cdot5^2=25$，$2^1\cdot5^2=50$

の 9 個ある。

更に，$n=23\cdot2=46$，$n=23\cdot2^2=92$ のとき，それぞれ $\dfrac{23}{46}=0.5$，$\dfrac{23}{92}=0.25$ であるから，有限小数となる。

よって，求める n の個数は　$90-1-(9+2)=78$ (個)

2．(1)　10 進数 28 を，2 進法と 3 進法で表せ。

(2)　10 進数 0.248 を，5 進法で表せ。

解答　(1)　順に $11100_{(2)}$，$1001_{(3)}$　　(2)　$0.111_{(5)}$

解説

(1)　下の計算から　$28=11100_{(2)}$，$28=1001_{(3)}$

(2)　下の計算から　$0.248=0.111_{(5)}$　　← 整数部分を順に並べる

(1)

$$\begin{array}{r|rl}
2 & 28 & \text{余り} \\
2 & 14 & \cdots 0 \\
2 & 7 & \cdots 0 \\
2 & 3 & \cdots 1 \\
2 & 1 & \cdots 1 \\
 & 0 & \cdots 1
\end{array}\uparrow
\qquad
\begin{array}{r|rl}
3 & 28 & \text{余り} \\
3 & 9 & \cdots 1 \\
3 & 3 & \cdots 0 \\
3 & 1 & \cdots 0 \\
 & 0 & \cdots 1
\end{array}\uparrow$$

(2)

$$\begin{array}{r}
0.248 \\
\times\quad 5 \\ \hline
1.240 \\
\times\quad 5 \\ \hline
1.20 \\
\times\quad 5 \\ \hline
1.0
\end{array}$$

3．次の足し算，引き算の結果を，[　] 内の表し方で表せ。

(1)　$10010_{(2)}+10111_{(2)}$　[2 進法]　　(2)　$1343_{(5)}+234_{(5)}$　[5 進法]

(3)　$101101_{(2)}-11011_{(2)}$　[2 進法]　　(4)　$3425_{(7)}-1346_{(7)}$　[7 進法]

解答　(1)　$101001_{(2)}$　　(2)　$2132_{(5)}$　　(3)　$10010_{(2)}$　　(4)　$2046_{(7)}$

解説

(1)　$10010_{(2)}+10111_{(2)}=101001_{(2)}$

$$\begin{array}{r}
10010_{(2)} \\
+\quad 10111_{(2)} \\ \hline
101001_{(2)}
\end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r}
18 \\
+\ 23 \\ \hline
41=101001_{(2)}
\end{array}$$

(2)　$1343_{(5)}+234_{(5)}=2132_{(5)}$

$$\begin{array}{r}
1343_{(5)} \\
+\quad 234_{(5)} \\ \hline
2132_{(5)}
\end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r}
223 \\
+\ 69 \\ \hline
292=2132_{(5)}
\end{array}$$

(3)　$101101_{(2)}-11011_{(2)}=10010_{(2)}$

$$\begin{array}{r}
101101_{(2)} \\
-\quad 11011_{(2)} \\ \hline
10010_{(2)}
\end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r}
45 \\
-\ 27 \\ \hline
18=10010_{(2)}
\end{array}$$

(4)　$3425_{(7)}-1346_{(7)}=2046_{(7)}$

$$\begin{array}{r}
3425_{(7)} \\
-\quad 1346_{(7)} \\ \hline
2046_{(7)}
\end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r}
1244 \\
-\ 524 \\ \hline
720=2046_{(7)}
\end{array}$$

4．(1)　10 進法で表された正の整数を 8 進法に直すと 3 桁の数 $abc_{(8)}$ となり，7 進法に直すと 3 桁の数 $cba_{(7)}$ となるとする。この数を 10 進法で書け。

(2)　4 進法で表すと 5 桁となるような自然数は何個あるか。

解答　(1)　220　　(2)　768 個

解説

(1)　3 桁の数 $abc_{(8)}$，$cba_{(7)}$ を考えるから

$1\leqq a\leqq6$，$0\leqq b\leqq6$，$1\leqq c\leqq6$　……①

このとき　$abc_{(8)}=a\cdot8^2+b\cdot8^1+c\cdot8^0=64a+8b+c$

$cba_{(7)}=c\cdot7^2+b\cdot7^1+a\cdot7^0=49c+7b+a$

よって　$64a+8b+c=49c+7b+a$

整理すると　$b=48c-63a=3(16c-21a)$　……②

ゆえに，b は 3 の倍数であるから，① より　$b=0$，3，6

[1]　$b=0$ のとき　② から　$21a=16c$

これと ① を満たす整数 a，c は存在しない。

[2]　$b=3$ のとき　② から　$21a=16c-1$

これと ① を満たす整数は　$a=3$，$c=4$

[3]　$b=6$ のとき　② から　$21a=16c-2$

これと ① を満たす整数 a，c は存在しない。

以上から　$a=3$，$b=3$，$c=4$

よって，求める数は

$334_{(8)}=3\cdot8^2+3\cdot8^1+4\cdot8^0=220$

(2)　4 進法で表すと 5 桁となるような自然数を x とすると

$4^{5-1}\leqq x<4^5$　すなわち　$4^4\leqq x<4^5$

この不等式を満たす自然数 x の個数は

$(4^5-1)-4^4+1=4^5-4^4=4^4(4-1)=4^4\cdot3=768$ (個)

別解　4 進法で表すと 5 桁となる自然数は，○□□□□$_{(4)}$ の○に 1～3，□に 0～3 のいずれかを入れた数であるから　$3\cdot4^4=768$ (個)

5．(1)　47^{2015} を 10 進法で表すとき，一の位の数字を求めよ。

(2)　13^{15} を 5 進法で表すとき，一の位の数字を求めよ。

解答　(1)　3　　(2)　2

解説

(1)　$7\times7=49$，$9\times7=63$，$3\times7=21$，$1\times7=7$ であるから，47^n を 10 進法で表したときの一の位の数字は，4 つの数 7，9，3，1 の繰り返しになる。

ここで $2015=4\cdot503+3$ であるから，47^{2015} の一の位の数字は 3 である。

(2)　$3\times3=9$，$9\times3=27$，$7\times3=21$，$1\times3=3$ であるから，13^n を 10 進法で表したときの一の位の数字は，4 つの数 3，9，7，1 の繰り返しになる。

ここで $15=4\cdot3+3$ であるから，13^{15} を 10 進法で表したときの一の位の数字は 7 である。

このとき，$13^{15}=10A+7$（A は正の整数）と表され，$10A$ を 5 進法で表すと，一の位の数字は 0 である。

したがって，求める数字は，7 を 5 進法で表したときの一の位の数字であるから，

$7=5^1+2$ より　2

別解　(1)　47^{2015} を 10 で割った余りを求めればよい。

$47^2\equiv7^2\equiv49\equiv-1 \pmod{10}$

ゆえに　$47^{2015}\equiv(47^2)^{1007}\cdot47\equiv(-1)^{1007}\cdot(-3)\equiv3 \pmod{10}$

よって，求める数字は　3

(2)　13^{15} を 5 で割った余りを求めればよい。

$13^2\equiv3^2\equiv9\equiv-1 \pmod 5$

ゆえに　$13^{15}\equiv(13^2)^7\cdot13\equiv(-1)^7\cdot3\equiv-3\equiv2 \pmod 5$

よって，求める数字は　2

6．次の掛け算，割り算の結果を，2 進法で表せ。

(1)　$10111_{(2)}\times1011_{(2)}$　　(2)　$11000011_{(2)}\div1101_{(2)}$

解答　(1)　$11111101_{(2)}$　　(2)　$1111_{(2)}$

解説

(1)　$10111_{(2)}\times1011_{(2)}=11111101_{(2)}$

$$\begin{array}{r}
10111_{(2)} \\
\times\quad 1011_{(2)} \\ \hline
10111_{(2)} \\
10111_{(2)} \\
10111_{(2)} \\ \hline
11111101_{(2)}
\end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r}
23 \\
\times\ 11 \\ \hline
23 \\
23 \\ \hline
253=11111101_{(2)}
\end{array}$$

(2)　$11000011_{(2)}\div1101_{(2)}=1111_{(2)}$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 1111_{(2)} \\ 1101_{(2)}\overline{)\,11000011_{(2)}} \\ 1101_{(2)} \\ \hline 10110_{(2)} \\ 1101_{(2)} \\ \hline 10011_{(2)} \\ 1101_{(2)} \\ \hline 1101_{(2)} \\ 1101_{(2)} \\ \hline 0_{(2)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15=1111_{(2)} \\ 13\overline{)\,195} \\ 13 \\ \hline 65 \\ 65 \\ \hline 0 \end{array}$$

7. (1) $21201_{(3)}+623_{(7)}$ を計算し，5 進数で答えよ。

(2) $\dfrac{3}{8}$ を 2 進法，3 進法の小数でそれぞれ表せ。

解答 (1) $4034_{(5)}$ (2) 順に $0.011_{(2)}$，$0.\dot{1}\dot{0}_{(3)}$

解説

(1) $21201_{(3)}$，$623_{(7)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと

$21201_{(3)}=2\cdot3^4+1\cdot3^3+2\cdot3^2+0\cdot3^1+1\cdot3^0=208$

$623_{(7)}=6\cdot7^2+2\cdot7^1+3\cdot7^0=311$

よって $21201_{(3)}+623_{(7)}=519$

ゆえに，519 を 5 進法で表すと，右の計算から $4034_{(5)}$

$$\begin{array}{rl} 5\,\underline{)\,519} & \text{余り} \\ 5\,\underline{)\,103} & \cdots 4 \\ 5\,\underline{)\;\;20} & \cdots 3 \\ 5\,\underline{)\;\;\;4} & \cdots 0 \\ 0 & \cdots 4 \end{array}$$

(2) $\dfrac{3}{8}\times2=0+\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{3}{4}\times2=1+\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}\times2=1$

よって $\dfrac{3}{8}=0.011_{(2)}$

$\dfrac{3}{8}\times3=1+\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{1}{8}\times3=0+\dfrac{3}{8}$

以下，同じ計算の繰り返しとなるから

$\dfrac{3}{8}=0.\dot{1}\dot{0}_{(3)}$

別解 $3=11_{(2)}$，$8=1000_{(2)}$ であるから，

右の計算により

$\dfrac{3}{8}=0.011_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 0.011_{(2)} \\ 1000_{(2)}\overline{)\,11_{(2)}} \\ 1000_{(2)} \\ \hline 1000_{(2)} \\ 1000_{(2)} \\ \hline 0_{(2)} \end{array}$$

また，$3=10_{(3)}$，$8=22_{(3)}$ であるから，

右の計算により

$\dfrac{3}{8}=0.\dot{1}\dot{0}_{(3)}$

$$\begin{array}{r} 0.10\cdots\cdots_{(3)} \\ 22_{(3)}\overline{)\,10_{(3)}} \\ 22_{(3)} \\ \hline 10_{(3)} \end{array}$$

8. 0，1，2，3，4 の 5 種類の数字を用いて 1 以上の整数を作り，小さい順に並べる。

1，2，3，4，10，11，12，13，14，20，21，22，……

(1) 2001 は何番目の数であるか。

(2) 2001 番目の数を求めよ。

解答 (1) 251 番目の数 (2) 31001

解説

1，2，3，4，10，11，12，13，14，20，21，22，…… は，1 以上の 5 進数を小さい順に並べたものと同じである。

(1) $2001_{(5)}=2\cdot5^3+1=251$

したがって，2001 は 251 番目の数

(2) 右の計算から

$2001=31001_{(5)}$

したがって，2001 番目の数は 31001

$$\begin{array}{rl} 5\,\underline{)\,2001} & \text{余り} \\ 5\,\underline{)\;\;400} & \cdots 1 \\ 5\,\underline{)\;\;\;80} & \cdots 0 \\ 5\,\underline{)\;\;\;16} & \cdots 0 \\ 5\,\underline{)\;\;\;\;3} & \cdots 1 \\ 0 & \cdots 3 \end{array}$$

9. 8 進法で表すと 3 桁になる整数を，2 進法で表すと何桁の数になるか。考えられる桁数をすべて求めよ。

解答 7 桁，8 桁，9 桁

解説

8 進法で表すと 3 桁になる整数を N とすると

$8^{3-1}\leqq N<8^3$ すなわち $8^2\leqq N<8^3$

よって $(2^3)^2\leqq N<(2^3)^3$ すなわち $2^6\leqq N<2^9$

ゆえに，N を 2 進法で表すと，7 桁，8 桁，9 桁の数となる。

10. (1) 自然数のうち，10 進法で表しても 5 進法で表しても 3 桁になるものは全部で何個あるか。

(2) 自然数のうち，10 進法で表しても 5 進法で表しても，ともに 4 桁になるものは存在しないことを示せ。

解答 (1) 25 個 (2) 略

解説

自然数を N とする。

(1) 10 進法で表すと 3 桁であるから $10^2\leqq N<10^3$

よって $100\leqq N<1000$ ……①

5 進法で表すと 3 桁であるから $5^2\leqq N<5^3$

よって $25\leqq N<125$ ……②

①，② の共通範囲は $100\leqq N<125$

したがって，10 進法で表しても 5 進法で表しても 3 桁になるものは全部で 25 個

(2) (1) と同様に考えると

$10^3\leqq N<10^4$ から $1000\leqq N<10000$ ……③

$5^3\leqq N<5^4$ から $125\leqq N<625$ ……④

③，④ の共通範囲はないから，10 進法で表しても 5 進法で表しても，ともに 4 桁になるものは存在しない。

11. (1) ある自然数 m を 8 進法で表すと 2525 になる。m の 2 倍を 8 進法で表せ。

(2) ある自然数とその 2 倍の数をそれぞれ 8 進法で表したとき，ともに 4 桁で，数字の並び方は逆になっているという。このような自然数をすべて求め，それらを 8 進法で表せ。

解答 (1) $5252_{(8)}$ (2) $2525_{(8)}$，$2775_{(8)}$

解説

(1) $2525_{(8)}=2\cdot8^3+5\cdot8^2+2\cdot8^1+5$

よって，$2525_{(8)}$ を 2 倍すると

$$\begin{aligned} 4\cdot8^3+10\cdot8^2+4\cdot8^1+10 &= 4\cdot8^3+(8+2)\cdot8^2+4\cdot8^1+(8+2) \\ &= 4\cdot8^3+8^3+2\cdot8^2+4\cdot8^1+8^1+2 \\ &= (4+1)\cdot8^3+2\cdot8^2+(4+1)\cdot8^1+2 \\ &= 5\cdot8^3+2\cdot8^2+5\cdot8^1+2 \\ &= 5252_{(8)} \end{aligned}$$

(2) もとの自然数を 8 進法で表したものを $abcd_{(8)}$ とすると，条件から，2 倍した数は $dcba_{(8)}$ と表される。

$abcd_{(8)}=a\cdot8^3+b\cdot8^2+c\cdot8^1+d$ であるから，2 倍すると

$2a\cdot8^3+2b\cdot8^2+2c\cdot8^1+2d$ ……①

また $dcba_{(8)}=d\cdot8^3+c\cdot8^2+b\cdot8^1+a$ ……②

$abcd_{(8)}$ を 2 倍した数は 4 桁であるから，①より

$2a=2,\ 4,\ 6$ すなわち $a=1,\ 2,\ 3$

① と ② の 8^0 の位は等しいから，a は偶数である。

よって $a=2$

このとき，① と ② の 8^0 の位は等しいから $d=1,\ 5$

更に $a=2$ であるから，$d=1$ のときは ① と ② の値は等しくならない。

よって $d=5$

ゆえに，①，② は $4\cdot8^3+2b\cdot8^2+(2c+1)\cdot8^1+2$ ……①′

$5\cdot8^3+c\cdot8^2+b\cdot8^1+2$ ……②′

①′ と ②′ の 8^1 の位は等しいから $2c+1=b$，$b+8$

[1] $2c+1=b$ のとき

①′ と ②′ の 8^3 の位と 8^2 の位は等しいから $2b=c+8$

よって $b=5$，$c=2$ ゆえに $2525_{(8)}$

[2] $2c+1=b+8$ のとき

①′ と ②′ の 8^3 の位と 8^2 の位は等しいから $2b+1=c+8$

よって $b=7$，$c=7$ ゆえに $2775_{(8)}$