数学演習（整数の性質）Ｈ２４．１２．１９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次の 2 つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

(1)　817，988　　(2)　997，1201　　(3)　2415，9345

2．次の等式を満たす整数 x，y の組を 1 つ求めよ。

(1)　$19x+26y=1$　　(2)　$19x+26y=-2$

3．次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$5x+7y=1$　　(2)　$35x-29y=3$

4．11 で割ると 9 余り，5 で割ると 2 余る 3 桁の自然数のうち最大の数を求めよ。

5．方程式 $9x+4y=50$ を満たす自然数 x，y の組を求めよ。

6．(1)　2 つの整数 m，n の最大公約数と $5m+6n$，$4m+5n$ の最大公約数は一致することを示せ。

(2)　$7n+1$ と $8n+4$ の最大公約数が 5 になるような 100 以下の自然数 n をすべて求めよ。

7．次の等式を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

(1)　$(x+2)(y-1)=-6$　　(2)　$2xy-2x-5y=0$

8．次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

(1)　$x+3y+z=10$　　(2)　$xyz=x+y+z$（$x \leqq y \leqq z$）

9．次の等式を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

$$x^2-2xy+2y^2=13$$

10. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ かつ $4 \leqq x < y < z$ を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

1．次の 2 つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

(1)　817，988　　　(2)　997，1201　　　(3)　2415，9345

解答　(1)　19　　(2)　1　　(3)　105

解説

(1)　$988=817\cdot1+171$

$817=171\cdot4+133$

$171=133\cdot1+38$

$133=38\cdot3+19$

$38=19\cdot2+0$

	2	3	1	4	1
19	38	133	171	817	988
	38	114	133	684	817
	0	19	38	133	171

よって，817 と988 の最大公約数は　19

(2)　$1201=997\cdot1+204$

$997=204\cdot4+181$

$204=181\cdot1+23$

$181=23\cdot7+20$

$23=20\cdot1+3$

$20=3\cdot6+2$

$3=2\cdot1+1$

$2=1\cdot2+0$

	2	1	6	1	7	1	4	1
1	2	3	20	23	181	204	997	1201
	2	2	18	20	161	181	816	997
	0	1	2	3	20	23	181	204

よって，997 と 1201 の最大公約数は　1

(3)　$9345=2415\cdot3+2100$

$2415=2100\cdot1+315$

$2100=315\cdot6+210$

$315=210\cdot1+105$

$210=105\cdot2+0$

	2	1	6	1	3
105	210	315	2100	2415	9345
	210	210	1890	2100	7245
	0	105	210	315	2100

よって，2415 と 9345 の最大公約数は　105

2．次の等式を満たす整数 x，y の組を 1 つ求めよ。

(1)　$19x+26y=1$　　　(2)　$19x+26y=-2$

解答　(1)　$x=11$，$y=-8$　　(2)　$x=-22$，$y=16$

解説

(1)　$26=19\cdot1+7$　移項すると　$7=26-19\cdot1$

$19=7\cdot2+5$　移項すると　$5=19-7\cdot2$

$7=5\cdot1+2$　移項すると　$2=7-5\cdot1$

$5=2\cdot2+1$　移項すると　$1=5-2\cdot2$

よって　$1=5-2\cdot2=5-(7-5\cdot1)\cdot2$

$=7\cdot(-2)+5\cdot3=7\cdot(-2)+(19-7\cdot2)\cdot3$

$=19\cdot3+7\cdot(-8)=19\cdot3+(26-19\cdot1)\cdot(-8)$

$=19\cdot11+26\cdot(-8)$

すなわち　$19\cdot11+26\cdot(-8)=1$　……①

したがって，求める整数 x，y の組の 1 つは

$x=11$，$y=-8$

別解　$a=19$，$b=26$ とする。

$7=26-19\cdot1=b-a$

$5=19-7\cdot2=a-2(b-a)=3a-2b$

$2=7-5\cdot1=(b-a)-(3a-2b)=-4a+3b$

$1=5-2\cdot2=(3a-2b)-2(-4a+3b)=11a-8b$

すなわち　$19\cdot11+26\cdot(-8)=1$

よって，求める整数 x，y の組の 1 つは　$x=11$，$y=-8$

(2)　① の両辺に -2 を掛けると

$19\cdot\{11\cdot(-2)\}+26\cdot\{(-8)\cdot(-2)\}=-2$

すなわち　$19\cdot(-22)+26\cdot16=-2$

したがって，求める整数 x，y の組の 1 つは

$x=-22$，$y=16$

3．次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$5x+7y=1$　　　(2)　$35x-29y=3$

解答　(1)　$x=7k+3$，$y=-5k-2$　（k は整数）

(2)　$x=29k+15$，$y=35k+18$　（k は整数）

解説

(1)　$5x+7y=1$　……①

$x=3$，$y=-2$ は，① の整数解の 1 つである。

よって　$5\cdot3+7\cdot(-2)=1$　……②

①－② から　$5(x-3)+7(y+2)=0$

すなわち　$5(x-3)=-7(y+2)$　……③

5 と 7 は互いに素であるから，③ より

$x-3=7k$，$y+2=-5k$　（k は整数）

したがって，① のすべての整数解は

$x=7k+3$，$y=-5k-2$　（k は整数）

(2)　$35x-29y=3$　……①

$x=5$，$y=6$ は，$35x-29y=1$ の整数解の 1 つである。

よって　$35\cdot5-29\cdot6=1$

両辺に 3 を掛けると

$35\cdot15-29\cdot18=3$　……②

①－②から　$35(x-15)-29(y-18)=0$

すなわち　$35(x-15)=29(y-18)$　……③

35 と 29 は互いに素であるから，③ より

$x-15=29k$，$y-18=35k$　（k は整数）

したがって，①のすべての整数解は

$x=29k+15$，$y=35k+18$　（k は整数）

参考　（$x=5$，$y=6$ の互除法による求め方）

35 と 29 に互除法を用いると

$35=29\cdot1+6$　移項すると　$6=35-29\cdot1$

$29=6\cdot4+5$　移項すると　$5=29-6\cdot4$

$6=5\cdot1+1$　移項すると　$1=6-5\cdot1$

よって　$1=6-5\cdot1=6-(29-6\cdot4)\cdot1$

$=29\cdot(-1)+6\cdot5=29\cdot(-1)+(35-29\cdot1)\cdot5$

$=35\cdot5+29\cdot(-6)$

すなわち　$35\cdot5-29\cdot6=1$

別解　$35x-29y=3$　……① において

$35=29\cdot1+6$ から　$(29\cdot1+6)x-29y=3$

ゆえに　$6x+29(x-y)=3$

$29=6\cdot4+5$ から　$6x+(6\cdot4+5)(x-y)=3$

ゆえに　$5(x-y)+6(5x-4y)=3$

$x-y=m$，$5x-4y=n$ とおくと

$5m+6n=3$

$m=-3$，$n=3$ は，$5m+6n=3$ の整数解の 1 つである。

よって　$x-y=-3$，$5x-4y=3$

これを解くと　$x=15$，$y=18$

ゆえに，$35\cdot15-29\cdot18=3$　…… ② が成り立つ。

以下，解答と同様。

4．11 で割ると 9 余り，5 で割ると 2 余る 3 桁の自然数のうち最大の数を求めよ。

解答　977

解説

求める自然数を n とすると，n は x，y を整数として，次のように表される。

$n=11x+9$，　$n=5y+2$

よって　$11x+9=5y+2$

すなわち　$5y-11x=7$　……①

$y=-2$，$x=-1$ は，$5y-11x=1$ の整数解の 1 つであるから

$5\cdot(-2)-11\cdot(-1)=1$

両辺に 7 を掛けると

$5\cdot(-14)-11\cdot(-7)=7$　……②

①－②から　$5(y+14)-11(x+7)=0$

すなわち　$5(y+14)=11(x+7)$　……③

5 と 11 は互いに素であるから，③を満たす整数 x は

$x+7=5k$　すなわち　$x=5k-7$　（k は整数）

と表される。

したがって　$n=11x+9=11(5k-7)+9=55k-68$

$55k-68$ が 3 桁で最大となるのは，$55k-68\leqq999$ を満たす k が最大のときであり，その値は　$k=19$

このとき　$n=55\cdot19-68=977$

5．方程式 $9x+4y=50$ を満たす自然数 x，y の組を求めよ。

解答　$(x,\ y)=(2,\ 8)$

解説

$9x+4y=50$ から　$9x=50-4y$

すなわち　$9x=2(25-2y)$　……①

9 と 2 は互いに素であるから，x は 2 の倍数である。　……②

① において，$y\geqq1$ であるから　$25-2y\leqq23$

よって　$9x\leqq2\cdot23=46$

更に，$x\geqq1$ であるから　$1\leqq x\leqq\dfrac{46}{9}$　……③

②，③ から　$x=2$，4

$y=\dfrac{50-9x}{4}$ であるから，x，y がともに自然数となる組は　$(x,\ y)=(2,\ 8)$

6．(1)　2 つの整数 m，n の最大公約数と $5m+6n$，$4m+5n$ の最大公約数は一致することを示せ。

(2)　$7n+1$ と $8n+4$ の最大公約数が 5 になるような 100 以下の自然数 n をすべて求めよ。

解答　(1)　略　　(2)　$n=2,\ 12,\ 22,\ 32,\ 42,\ 52,\ 62,\ 72,\ 82,\ 92$

解説

(1)　$5m+6n=(4m+5n)\cdot 1+m+n$,

$4m+5n=(m+n)\cdot 4+n$,

$m+n=n\cdot 1+m$

よって，$5m+6n$ と $4m+5n$，$4m+5n$ と $m+n$，$m+n$ と n，m と n の最大公約数はすべて等しい。

したがって，m，n の最大公約数と $5m+6n$，$4m+5n$ の最大公約数は一致する。

(2)　$8n+4=(7n+1)\cdot 1+n+3$,

$7n+1=(n+3)\cdot 7-20$

よって，$8n+4$ と $7n+1$，$7n+1$ と $n+3$，$n+3$ と 20 の最大公約数はすべて等しい。

最大公約数が 5 であり $20=2^2\cdot 5$ であるから

$$n+3=5p$$

と表される。ただし，p は奇数である。

n は 100 以下の自然数であるから

$$n+3=5,\ 15,\ 25,\ 35,\ 45,\ 55,\ 65,\ 75,\ 85,\ 95$$

したがって，求める n の値は

$$n=2,\ 12,\ 22,\ 32,\ 42,\ 52,\ 62,\ 72,\ 82,\ 92$$

7．次の等式を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

(1)　$(x+2)(y-1)=-6$　　　(2)　$2xy-2x-5y=0$

解答　(1)　$(x,\ y)=(-1,\ -5),\ (0,\ -2),\ (1,\ -1),\ (4,\ 0),\ (-3,\ 7),\ (-4,\ 4),$
$(-5,\ 3),\ (-8,\ 2)$

(2)　$(x,\ y)=(3,\ 6),\ (5,\ 2),\ (2,\ -4),\ (0,\ 0)$

解説

(1)　$(x+2)(y-1)=-6$ において

x，y は整数であるから，$x+2$ と $y-1$ はともに整数である。

積が -6 になる整数 $x+2$，$y-1$ の組は

$(x+2,\ y-1)=(1,\ -6),\ (2,\ -3),\ (3,\ -2),\ (6,\ -1),$
$(-1,\ 6),\ (-2,\ 3),\ (-3,\ 2),\ (-6,\ 1)$

よって，求める x，y の組は

$(x,\ y)=(-1,\ -5),\ (0,\ -2),\ (1,\ -1),\ (4,\ 0),$
$(-3,\ 7),\ (-4,\ 4),\ (-5,\ 3),\ (-8,\ 2)$

(2)　$2xy-2x-5y=2x(y-1)-5(y-1)-5$
$=(2x-5)(y-1)-5$

よって，与式を変形すると　$(2x-5)(y-1)=5$

x，y は整数であるから，$2x-5$ と $y-1$ はともに整数である。

積が 5 になる整数 $2x-5$，$y-1$ の組は

$(2x-5,\ y-1)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (-1,\ -5),\ (-5,\ -1)$

よって，求める x，y の組は

$(x,\ y)=(3,\ 6),\ (5,\ 2),\ (2,\ -4),\ (0,\ 0)$

8．次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

(1)　$x+3y+z=10$　　　(2)　$xyz=x+y+z$ $(x\leqq y\leqq z)$

解答　(1)　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 6),\ (2,\ 1,\ 5),\ (3,\ 1,\ 4),\ (4,\ 1,\ 3),\ (5,\ 1,\ 2),$
$(6,\ 1,\ 1),\ (1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1)$

(2)　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$

解説

(1)　$x+3y+z=10$ から　　$3y=10-(x+z)\leqq 10-(1+1)$

よって　　$3y\leqq 8$　　y は自然数であるから　　$y=1,\ 2$

[1]　$y=1$ のとき　　$x+z=7$

x，z は自然数であるから

$(x,\ z)=(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$

[2]　$y=2$ のとき　　$x+z=4$

x，z は自然数であるから

$(x,\ z)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$

以上から，求める組は

$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 6),\ (2,\ 1,\ 5),\ (3,\ 1,\ 4),\ (4,\ 1,\ 3),\ (5,\ 1,\ 2),$
$(6,\ 1,\ 1),\ (1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1)$

(2)　$1\leqq x\leqq y\leqq z$ であるから　　$xyz=x+y+z\leqq z+z+z=3z$

よって　　$xy\leqq 3$

$1\leqq x\leqq y$ であるから　　$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)$

[1]　$(x,\ y)=(1,\ 1)$ のとき，等式は　　$z=2+z$

これを満たす自然数 z はない。

[2]　$(x,\ y)=(1,\ 2)$ のとき，等式は　　$2z=3+z$

よって　　$z=3$　　このとき $x\leqq y\leqq z$ は満たされる。

[3]　$(x,\ y)=(1,\ 3)$ のとき，等式は　　$3z=4+z$

よって　　$z=2$　　このとき，$y>z$ となり不適。

[1]，[2]，[3] から　　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$

9．次の等式を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

$$x^2-2xy+2y^2=13$$

解答　$(x,\ y)=(5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (1,\ 3)$

解説

$x^2-2xy+2y^2=13$ から　　$(x-y)^2+y^2=13$　……①

よって　　$(x-y)^2=13-y^2\geqq 0$　　ゆえに　　$y^2\leqq 13$

したがって　　$y=1,\ 2,\ 3$

[1]　$y=1$ のとき，① は　　$(x-1)^2+1^2=13$

よって　　$(x-1)^2=12$　　これを満たす自然数 x はない。

[2]　$y=2$ のとき，① は　　$(x-2)^2+2^2=13$

よって　　$(x-2)^2=9$　　ゆえに　　$x-2=\pm 3$

x は自然数であるから　　$x=5$

[3]　$y=3$ のとき，① は　　$(x-3)^2+3^2=13$

よって　　$(x-3)^2=4$　　ゆえに　　$x-3=\pm 2$

よって　　$x=5,\ 1$　　この x の値は適する。

[1]，[2]，[3] から　　$(x,\ y)=(5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (1,\ 3)$

別解　等式から　　$x^2-2yx+2y^2-13=0$

この x についての 2 次方程式が実数解をもつから，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-y)^2-1\cdot(2y^2-13)=-y^2+13$$

$D\geqq 0$ であるから　　$-y^2+13\geqq 0$

よって　　$y^2\leqq 13$　　以後の解答は同様。

10．$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ かつ $4\leqq x<y<z$ を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

解答　$(x,\ y,\ z)=(4,\ 5,\ 20),\ (4,\ 6,\ 12)$

解説

$0<x<y<z$ であるから　　$\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{x}$

よって　　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ であるから　　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{x}$

ゆえに　　$\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{x}$　　よって　　$x<6$

ゆえに　　$4\leqq x<6$

x は自然数であるから　　$x=4,\ 5$

[1]　$x=4$ のとき，等式は　　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　……①

ここで，$0<y<z$ であるから　　$\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{y}$

よって　　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$

① から　　$\dfrac{1}{4}<\dfrac{2}{y}$　　ゆえに　　$\dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{y}$

よって　　$y<8$　　ゆえに　　$4<y<8$

y は自然数であるから　　$y=5,\ 6,\ 7$

$y=5$ のとき，① は　　$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　　よって　　$z=20$

これは $y<z$ を満たす。

$y=6$ のとき，① は　　$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　　よって　　$z=12$

これは $y<z$ を満たす。

$y=7$ のとき，① は　　$\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　　よって　　$z=\dfrac{28}{3}$

これは条件を満たさない。

[2]　$x=5$ のとき，等式は　　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{10}$　……②

ここで，$0<y<z$ であるから　　$\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{y}$

よって　　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$

② から　　$\dfrac{3}{10}<\dfrac{2}{y}$　　ゆえに　　$\dfrac{3}{20}<\dfrac{1}{y}$

よって　　$y<\dfrac{20}{3}=6.6\cdots\cdots$　　ゆえに　　$5<y\leqq 6$

y は自然数であるから　　$y=6$

このとき，② は　　$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{10}$　　よって　　$z=\dfrac{15}{2}$

これは条件を満たさない。

[1]，[2] から　　$(x,\ y,\ z)=(4,\ 5,\ 20),\ (4,\ 6,\ 12)$