数学演習（整数の性質）Ｈ２４．１２．１８　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．$a$，$b$ は整数とする。$a$ を 5 で割ると 2 余り，$b$ を 5 で割ると 3 余る。次の数を 5 で割った余りを求めよ。

(1)　$a+b$　　(2)　$a-b$　　(3)　$ab$　　(4)　$a^2+b^2$

２．(1)　$15^{30}$ を 7 で割った余りを求めよ。

(2)　$7^{80}$ を 8 で割った余りを求めよ。

(3)　$13^{30}$ を 17 で割った余りを求めよ。

３．$n$ は整数とする。次のことを証明せよ。

(1)　$2n^2-n+1$ は 3 で割り切れない。

(2)　$n$ が 5 で割り切れないとき，$n^2$ を 5 で割った余りは 1 または 4 である。

４．$n$ は整数とする。次のことを証明せよ。

(1)　$n(n+1)(n+2)(n+3)$ は 24 の倍数である。

(2)　$n(n+1)(n-4)$ は 6 の倍数である。

５．3 つの数 $p$，$2p+1$，$4p+1$ がいずれも素数となるような自然数 $p$ をすべて求めよ。

６．$n$ は 100 以下の正の整数で，$n$ を 7 で割ると 2 余り，$n^2$ を 11 で割ると 4 余る。このような $n$ の値をすべて求めよ。

7．合同式を用いて，次の問いに答えよ。

(1)　$13^{2017}$ を 5 で割ったときの余りを求めよ。

(2)　すべての正の整数 $n$ に対して，$3^{3n-2}+5^{3n-1}$ が 7 の倍数であることを証明せよ。

8．(1)　$n$ は整数とし，$N=2n^3+4n$ とする。$n$ が偶数のとき $N$ は 24 で割り切れ，$n$ が奇数のとき $N$ は 4 で割り切れないことを示せ。

(2)　自然数 $P$ が 2 でも 3 でも割り切れないとき，$P^2-1$ が 24 で割り切れることを証明せよ。

9．すべての自然数 $n$ に対して $2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}$ が 5 の倍数であることを証明せよ。

1．$a$，$b$ は整数とする。$a$ を 5 で割ると 2 余り，$b$ を 5 で割ると 3 余る。次の数を 5 で割った余りを求めよ。

(1)　$a+b$　(2)　$a-b$　(3)　$ab$　(4)　$a^2+b^2$

解答　(1)　0　(2)　4　(3)　1　(4)　3

解説

$a$，$b$ は整数 $k$，$l$ を用いて，$a=5k+2$，$b=5l+3$ と表される。

(1)　$a+b=(5k+2)+(5l+3)=5(k+l)+5=5(k+l+1)$

よって，求める余りは　0

(2)　$a-b=(5k+2)-(5l+3)=5(k-l)-1$
$=5(k-l-1)+4$

よって，求める余りは　4

(3)　$ab=(5k+2)(5l+3)=5^2kl+5k\cdot3+2\cdot5l+2\cdot3$
$=5(5kl+3k+2l)+6$
$=5(5kl+3k+2l+1)+1$

よって，求める余りは　1

(4)　$a^2+b^2=(5k+2)^2+(5l+3)^2$
$=5^2k^2+2\cdot5k\cdot2+2^2+5^2l^2+2\cdot5l\cdot3+3^2$
$=5(5k^2+4k+5l^2+6l)+13$
$=5(5k^2+4k+5l^2+6l+2)+3$

よって，求める余りは　3

別解　(1)　求める余りは　$2+3=5$ を 5 で割った余りと同じで　0
(2)　求める余りは　$2-3=-1$ を 5 で割った余りと同じで　4
(3)　求める余りは　$2\cdot3=6$ を 5 で割った余りと同じで　1
(4)　求める余りは　$2^2+3^2=13$ を 5 で割った余りと同じで　3

2．(1)　$15^{30}$ を 7 で割った余りを求めよ。
(2)　$7^{80}$ を 8 で割った余りを求めよ。
(3)　$13^{30}$ を 17 で割った余りを求めよ。

解答　(1)　1　(2)　1　(3)　16

解説

(1)　15 を 7 で割った余りは　1

よって，$15^{30}$ を 7 で割った余りは，$1^{30}$ すなわち 1 を 7 で割った余りに等しい。

したがって，求める余りは　1

(2)　$7^{80}=(7^2)^{40}=49^{40}$

49 を 8 で割った余りは　1

よって，$49^{40}$ を 8 で割った余りは，$1^{40}$ すなわち 1 を 8 で割った余りに等しい。

したがって，求める余りは　1

(3)　$13^{30}=(13^2)^{15}=169^{15}$

169 を 17 で割った余りは　16

よって，$13^{30}$ を 17 で割った余りは，$16^{15}$ を 17 で割った余りに等しい。

更に　$16^{15}=16\cdot(16^2)^7=16\cdot256^7$

256 を 17 で割った余りは　1

ゆえに，$16^{15}$ を 17 で割った余りは，$16\cdot1^7$ すなわち 16 を 17 で割った余りに等しい。

したがって，求める余りは　16

3．$n$ は整数とする。次のことを証明せよ。
(1)　$2n^2-n+1$ は 3 で割り切れない。
(2)　$n$ が 5 で割り切れないとき，$n^2$ を 5 で割った余りは 1 または 4 である。

解答　(1)　略　(2)　略

解説

$k$ を整数とする。

(1)　[1]　$n=3k$ のとき
$2n^2-n+1=2(3k)^2-3k+1=3(6k^2-k)+1$

[2]　$n=3k+1$ のとき
$2n^2-n+1=2(3k+1)^2-(3k+1)+1=18k^2+9k+2$
$=3(6k^2+3k)+2$

[3]　$n=3k+2$ のとき
$2n^2-n+1=2(3k+2)^2-(3k+2)+1=18k^2+21k+7$
$=3(6k^2+7k+2)+1$

よって，$2n^2-n+1$ を 3 で割った余りは 1 または 2 であるから，$2n^2-n+1$ は 3 で割り切れない。

(2)　[1]　$n=5k+1$ のとき
$n^2=(5k+1)^2=25k^2+10k+1=5(5k^2+2k)+1$

[2]　$n=5k+2$ のとき
$n^2=(5k+2)^2=25k^2+20k+4=5(5k^2+4k)+4$

[3]　$n=5k+3$ のとき
$n^2=(5k+3)^2=25k^2+30k+9=5(5k^2+6k+1)+4$

[4]　$n=5k+4$ のとき
$n^2=(5k+4)^2=25k^2+40k+16=5(5k^2+8k+3)+1$

よって，$n$ が 5 で割り切れないとき，$n^2$ を 5 で割った余りは 1 または 4 である。

4．$n$ は整数とする。次のことを証明せよ。
(1)　$n(n+1)(n+2)(n+3)$ は 24 の倍数である。
(2)　$n(n+1)(n-4)$ は 6 の倍数である。

解答　(1)　略　(2)　略

解説

(1)　連続する 4 つの整数 $n$，$n+1$，$n+2$，$n+3$ の 2 つは 2 の倍数であり，そのうちの 1 つは 4 の倍数であるから，

$n(n+1)(n+2)(n+3)$ は 8 の倍数である。……①

また，連続する 4 つの整数 $n$，$n+1$，$n+2$，$n+3$ のいずれかは 3 の倍数であるから，

$n(n+1)(n+2)(n+3)$ は 3 の倍数である。……②

①，②より，$n(n+1)(n+2)(n+3)$ は 8 の倍数かつ 3 の倍数であるから，

$n(n+1)(n+2)(n+3)$ は 24 の倍数である。

(2)　$n(n+1)(n-4)=n(n+1)\{(n+2)-6\}$
$=n(n+1)(n+2)-6n(n+1)$

ここで，連続する 3 つの整数の積 $n(n+1)(n+2)$ は 6 の倍数であり，$6n(n+1)$ も 6 の倍数であるから，$n(n+1)(n-4)$ は 6 の倍数である。

5．3 つの数 $p$，$2p+1$，$4p+1$ がいずれも素数となるような自然数 $p$ をすべて求めよ。

解答　$p=3$

解説

$p$ が素数である場合について考えればよい。

$p=2$ のとき　$2p+1=5$ は素数だが $4p+1=9$ は素数ではない。

$p=3$ のとき　$2p+1=7$，$4p+1=13$ も素数である。

$p$ が 5 以上の素数であるとき，$p$ は自然数 $k$ を用いて
$3k+1$　または　$3k+2$
と表される。

[1]　$p=3k+1$ のとき
$2p+1=2(3k+1)+1=3(2k+1)$

$2k+1$ は 3 以上の自然数であるから，$2p+1$ は素数ではない。

[2]　$p=3k+2$ のとき
$4p+1=4(3k+2)+1=3(4k+3)$

$4k+3$ は 7 以上の自然数であるから，$4p+1$ は素数ではない。

以上から，$p$，$2p+1$，$4p+1$ がいずれも素数となるような自然数 $p$ は　$p=3$

6．$n$ は 100 以下の正の整数で，$n$ を 7 で割ると 2 余り，$n^2$ を 11 で割ると 4 余る。このような $n$ の値をすべて求めよ。

解答　$n=2$，9，79，86

解説

$n$ を 7 で割ると 2 余るから，
$n=7k+2$ ($k=0$，1，2，……，14)
と表される。

このとき　$n^2=(7k+2)^2=49k^2+28k+4$

$n^2$ を 11 で割ると 4 余るから，$n^2-4$ すなわち $49k^2+28k$ は 11 の倍数である。
$49k^2+28k=11(4k^2+3k)+5k^2-5k$
$=11(4k^2+3k)+5k(k-1)$

よって，$5k(k-1)$ が 11 の倍数であり，11 と 5 は互いに素であるから，$k(k-1)$ が 11 の倍数である。

$k=0$，1，2，……，14 であるから，適するのは　$k=0$，1，11，12

したがって　$n=2$，9，79，86

7．合同式を用いて，次の問いに答えよ。
(1)　$13^{2017}$ を 5 で割ったときの余りを求めよ。
(2)　すべての正の整数 $n$ に対して，$3^{3n-2}+5^{3n-1}$ が 7 の倍数であることを証明せよ。

解答　(1)　3　(2)　略

解説

(1)　$13\equiv3 \pmod 5$ であり
$3^2\equiv9\equiv-1 \pmod 5$
$3^4\equiv(3^2)^2\equiv(-1)^2\equiv1 \pmod 5$

よって　$13^{2017}\equiv3^{2017}\equiv(3^4)^{504}\cdot3\equiv1^{504}\cdot3\equiv3 \pmod 5$

ゆえに，求める余りは　3

(2)　$3^3\equiv 27\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 7)$，$5^3\equiv 125\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 7)$ であり

$$3^{3n-2}=3^{3(n-1)+1}=(3^3)^{n-1}\cdot 3$$

$$5^{3n-1}=5^{3(n-1)+2}=(5^3)^{n-1}\cdot 5^2$$

よって

$$\begin{aligned}3^{3n-2}+5^{3n-1}&\equiv(3^3)^{n-1}\cdot 3+(5^3)^{n-1}\cdot 5^2\\&\equiv(-1)^{n-1}\cdot 3+(-1)^{n-1}\cdot 25\\&\equiv(-1)^{n-1}(3+25)\\&\equiv(-1)^{n-1}\cdot 28\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7)\end{aligned}$$

ゆえに，$3^{3n-2}+5^{3n-1}$ は 7 の倍数である。

**8．**(1)　$n$ は整数とし，$N=2n^3+4n$ とする。$n$ が偶数のとき $N$ は 24 で割り切れ，$n$ が奇数のとき $N$ は 4 で割り切れないことを示せ。

(2)　自然数 $P$ が 2 でも 3 でも割り切れないとき，$P^2-1$ が 24 で割り切れることを証明せよ。

**解答**　(1)　略　　(2)　略

**解説**

(1)　[1]　$n$ が偶数　すなわち　$n=2k$ ($k$ は整数) のとき

$$N=2(2k)^3+4\cdot 2k=16k^3+8k=8k(2k^2+1)$$

[A]　$k=3l$ ($l$ は整数) のとき

$$N=8\cdot 3l\{2(3l)^2+1\}=24l\{2(3l)^2+1\}$$

[B]　$k=3l\pm 1$ ($l$ は整数) のとき

$$\begin{aligned}N&=8(3l\pm 1)\{2(3l\pm 1)^2+1\}=8(3l\pm 1)(18l^2\pm 12l+3)\\&=24(3l\pm 1)(6l^2\pm 4l+1)\quad(\text{複号同順})\end{aligned}$$

以上から，$n$ が偶数のとき $N$ は 24 で割り切れる。

[2]　$n$ が奇数　すなわち　$n=2k+1$ ($k$ は整数) のとき

$$\begin{aligned}N&=2(2k+1)^3+4(2k+1)=2(8k^3+12k^2+6k+1)+(8k+4)\\&=16k^3+24k^2+20k+6=4(4k^3+6k^2+5k+1)+2\end{aligned}$$

よって，$n$ が奇数のとき $N$ は 4 で割り切れない。

(2)　自然数は $k$ を自然数として $6k-5$，$6k-4$，$6k-3$，$6k-2$，$6k-1$，$6k$ のいずれかで表される。このうち，2 でも 3 でも割り切れないのは $6k-5$，$6k-1$ である。

[1]　$P=6k-1$ のとき

$$P^2-1=(6k-1)^2-1=36k^2-12k=12k(3k-1)$$

$k$ が偶数のとき，$12k$ が 24 の倍数であり，$P^2-1$ は 24 で割り切れる。

また，$k$ が奇数のとき，$3k-1$ は偶数となり，$P^2-1$ は 24 で割り切れる。

[2]　$P=6k-5$ のとき

$$P^2-1=(6k-5)^2-1=36k^2-60k+24=12(k-1)(3k-2)$$

$k$ が偶数のとき，$3k-2$ は偶数となり，$P^2-1$ は 24 で割り切れる。

また，$k$ が奇数のとき，$k-1$ は偶数となり，$P^2-1$ は 24 で割り切れる。

したがって，いずれの場合も題意は成り立つ。

**9．**すべての自然数 $n$ に対して $2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}$ が 5 の倍数であることを証明せよ。

**解答**　略

**解説**

$3^{3n-2}=3^{3(n-1)+1}=(3^3)^{n-1}\cdot 3$

$3^3=27$ を 5 で割った余りは　　2

よって，$3^{3n-2}$ を 5 で割った余りは，$3\cdot 2^{n-1}$ を 5 で割った余りに等しい。

また，7 を 5 で割った余りは　　2

よって，$7^{n-1}$ を 5 で割った余りは，$2^{n-1}$ を 5 で割った余りに等しい。

ゆえに，$2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}$ を 5 で割った余りは

$2^{n-1}+3\cdot 2^{n-1}+2^{n-1}=(1+3+1)\cdot 2^{n-1}=5\cdot 2^{n-1}$ を 5 で割った余りに等しい。

したがって，$2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}$ は 5 の倍数である。

**別解**　$3^3\equiv 27\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 5)$，$7\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 5)$ であるから

$$\begin{aligned}2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}&\equiv 2^{n-1}+(3^3)^{n-1}\cdot 3+7^{n-1}\\&\equiv 2^{n-1}+2^{n-1}\cdot 3+2^{n-1}\\&\equiv 2^{n-1}(1+3+1)\\&\equiv 2^{n-1}\cdot 5\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)\end{aligned}$$

よって，$2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}$ は 5 の倍数である。

**参考**　数学 B で学習する「数学的帰納法」という証明法を用いると，次のように証明できる。

[1]　$n=1$ のとき

$$2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}=2^0+3^1+7^0=1+3+1=5$$

これは 5 の倍数である。

[2]　$n=k$ ($k=1$，2，3，……) のとき，$2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}$ が 5 の倍数であると仮定すると　　$2^{k-1}+3^{3k-2}+7^{k-1}=5m$ ($m$ は整数)

と表される。

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}&=2^{(k+1)-1}+3^{3(k+1)-2}+7^{(k+1)-1}\\&=2^{(k-1)+1}+3^{(3k-2)+3}+7^{(k-1)+1}\\&=2\cdot 2^{k-1}+27\cdot 3^{3k-2}+7\cdot 7^{k-1}\\&=2(2^{k-1}+3^{3k-2}+7^{k-1})+25\cdot 3^{3k-2}+5\cdot 7^{k-1}\\&=2\cdot 5m+25\cdot 3^{3k-2}+5\cdot 7^{k-1}\\&=5(2m+5\cdot 3^{3k-2}+7^{k-1})\end{aligned}$$

$k\geqq 1$ から　　$3k-2\geqq 1$，$k-1\geqq 0$

よって，$2m+5\cdot 3^{3k-2}+7^{k-1}$ は整数であるから，$n=k+1$ のときも

$2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}$ は 5 の倍数である。

[1]，[2] から，すべての自然数 $n$ に対して $2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}$ は 5 の倍数である。