数学演習（整数の性質）Ｈ２４．１２．１７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．(1)　百の位の数が 3，十の位の数が 8 である 4 桁の自然数 A がある。A が 5 の倍数であり，3 の倍数であるとき，A を求めよ。

(2)　ある 2 桁の自然数 B を 9 倍して 72 を足すと，百の位が 6，一の位が 5 であるとき，B を求めよ。

２．(1)　$\sqrt{378n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

(2)　$\dfrac{n^3}{512}$，$\dfrac{n^2}{675}$ がともに自然数となるような最小の自然数 n を求めよ。

３．(1)　756 の正の約数の個数を求めよ。

(2)　自然数 N を素因数分解すると，素因数には p と 5 があり，これら以外の素因数はない。また，N の正の約数は 8 個，正の約数の総和は 90 である。素因数 p と自然数 N の値を求めよ。

４．次の条件を満たす自然数 n を，それぞれすべて求めよ。

(1)　n と 12 の最小公倍数が 540 である。

(2)　n と 45 と 60 の最小公倍数が 360 である。

５．(1)　a は自然数とする。$a+5$ は 4 の倍数であり，$a+3$ は 9 の倍数であるとき，$a+21$ は 36 の倍数であることを証明せよ。

(2)　a，k を自然数とする。このとき，a と $ka+1$ は互いに素であることを証明せよ。

６．(1)　238 と自然数 n の最大公約数が 14，最小公倍数が 1904 であるとき，n の値を求めよ。

(2)　2 桁の自然数 m，n $(m<n)$ の最大公約数は 10，最小公倍数は 100 である。このとき，m，n の値を求めよ。

7．$N=250!$ を素因数分解したとき，次の問いに答えよ。

(1)　素因数 5 の個数を求めよ。

(2)　N を計算すると，末尾には 0 は連続して何個並ぶか。

8．(1)　432 以下の自然数で，432 と互いに素であるものの個数を求めよ。

(2)　735 以下の自然数で，735 と互いに素であるものの個数を求めよ。

9．$\dfrac{34}{5}$，$\dfrac{51}{10}$，$\dfrac{85}{8}$ のいずれに掛けても積が自然数となる分数のうち，最も小さいものを求めよ。

10. $\sqrt{n^2+21}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ。

11. (1)　$P=2x^2+11xy+12y^2-5y-2$ を因数分解せよ。

(2)　$P=56$ を満たす自然数 x，y の値を求めよ。

1．(1)　百の位の数が 3，十の位の数が 8 である 4 桁の自然数 A がある。A が 5 の倍数であり，3 の倍数であるとき，A を求めよ。

(2)　ある 2 桁の自然数 B を 9 倍して 72 を足すと，百の位が 6，一の位が 5 であるとき，B を求めよ。

解答　(1)　$A=1380,\ 4380,\ 7380,\ 2385,\ 5385,\ 8385$　　(2)　$B=67$

解説

(1)　A の千の位，一の位の数をそれぞれ $x,\ y$ とすると

A が 5 の倍数であるから　$y=0$　または　$y=5$

A が 3 の倍数であるから　$x+3+8+y$ は 3 の倍数である。

よって　$y=0$ のとき　$x=1,\ 4,\ 7$

$y=5$ のとき　$x=2,\ 5,\ 8$

したがって　$A=1380,\ 4380,\ 7380,\ 2385,\ 5385,\ 8385$

(2)　B は 2 桁の自然数であるから　$10\leqq B\leqq 99$

よって　$9\cdot 10+72\leqq 9B+72\leqq 9\cdot 99+72$

すなわち　$162\leqq 9B+72\leqq 963$

ゆえに，$9B+72$ は 3 桁の自然数であり，$9B+72=9(B+8)$ であるから 9 の倍数である。

よって，$9B+72$ の十の位の数を x とすると，$6+x+5$ すなわち $11+x$ は 9 の倍数である。

更に，$0\leqq x\leqq 9$ であるから　$11\leqq 11+x\leqq 20$

よって，$11+x=18$ すなわち $x=7$ となり　$9B+72=675$

したがって　$B=(675-72)\div 9=67$

2．(1)　$\sqrt{378n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

(2)　$\dfrac{n^3}{512}$，$\dfrac{n^2}{675}$ がともに自然数となるような最小の自然数 n を求めよ。

解答　(1)　$n=42$　　(2)　$n=360$

解説

(1)　$\sqrt{378n}$ が自然数になるには，$378n$ がある自然数の 2 乗になればよい。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 378 \\ 3 & 189 \\ 3 & 63 \\ 3 & 21 \\ & 7 \end{array}$$

378 を素因数分解すると　$378=2\cdot 3^3\cdot 7$

378 に $2\cdot 3\cdot 7$ を掛けると　$2^2\cdot 3^4\cdot 7^2=(2\cdot 3^2\cdot 7)^2$

よって，求める自然数 n は　$n=2\cdot 3\cdot 7=42$

(2)　$512=2^9$，$675=3^3\cdot 5^2$ であるから，求める自然数 n は 2，3，5 を素因数にもつ。

最小の n を求めるから，$a,\ b,\ c$ を自然数として $n=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$ とおいてよい。

$\dfrac{n^3}{512}=\dfrac{2^{3a}\cdot 3^{3b}\cdot 5^{3c}}{2^9}$ が自然数となるための条件は

$3a\geqq 9$　……①

$\dfrac{n^2}{675}=\dfrac{2^{2a}\cdot 3^{2b}\cdot 5^{2c}}{3^3\cdot 5^2}$ が自然数となるための条件は

$2b\geqq 3,\ 2c\geqq 2$　……②

①，② を満たす最小の自然数 $a,\ b,\ c$ は

$a=3,\ b=2,\ c=1$

よって，求める自然数 n は

$n=2^3\cdot 3^2\cdot 5^1=360$

3．(1)　756 の正の約数の個数を求めよ。

(2)　自然数 N を素因数分解すると，素因数には p と 5 があり，これら以外の素因数はない。また，N の正の約数は 8 個，正の約数の総和は 90 である。素因数 p と自然数 N の値を求めよ。

解答　(1)　24 個　　(2)　$p=2,\ N=40$

解説

(1)　756 を素因数分解すると　$756=2^2\cdot 3^3\cdot 7$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 756 \\ 2 & 378 \\ 3 & 189 \\ 3 & 63 \\ 3 & 21 \\ & 7 \end{array}$$

よって，求める正の約数の個数は

$(2+1)(3+1)(1+1)=3\cdot 4\cdot 2=24$（個）

(2)　N の素因数には p と 5 以外はないから，$a,\ b$ を自然数として $N=p^a\cdot 5^b$ と表される。

N の正の約数が 8 個あるから　$(a+1)(b+1)=8$

[1]　$a+1=2,\ b+1=4$　すなわち　$a=1,\ b=3$ のとき

正の約数の総和が 90 であるから

$(1+p)(1+5+5^2+5^3)=90$

これを解くと　$p=-\dfrac{11}{26}$　　これは素数でないから不適。

[2]　$a+1=4,\ b+1=2$　すなわち　$a=3,\ b=1$ のとき

$(1+p+p^2+p^3)(1+5)=90$

整理すると　$p(p^2+p+1)=14$

14 の正の約数は 1，2，7，14 で，p は素数であるから，これを満たす p の値は

$p=2$

このとき　$N=2^3\cdot 5^1=40$

4．次の条件を満たす自然数 n を，それぞれすべて求めよ。

(1)　n と 12 の最小公倍数が 540 である。

(2)　n と 45 と 60 の最小公倍数が 360 である。

解答　(1)　$n=135,\ 270,\ 540$　　(2)　$n=8,\ 24,\ 40,\ 72,\ 120,\ 360$

解説

(1)　12 と 540 を素因数分解すると

$12=2^2\cdot 3,\ 540=2^2\cdot 3^3\cdot 5$

よって，12 との最小公倍数が 540 である自然数 n は

$n=2^a\cdot 3^3\cdot 5$　$(a=0,\ 1,\ 2)$

と表される。

したがって，求める自然数 n は

$n=2^0\cdot 3^3\cdot 5,\ 2^1\cdot 3^3\cdot 5,\ 2^2\cdot 3^3\cdot 5$

すなわち　$n=135,\ 270,\ 540$

(2)　45，60，360 を素因数分解すると

$45=3^2\cdot 5,\ 60=2^2\cdot 3\cdot 5,\ 360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$

よって，45，60 との最小公倍数が 360 である自然数 n は

$n=2^3\cdot 3^a\cdot 5^b$　$(a=0,\ 1,\ 2\ ;\ \ b=0,\ 1)$

と表される。

したがって，求める自然数 n は

$n=2^3\cdot 3^0\cdot 5^0,\ 2^3\cdot 3^1\cdot 5^0,\ 2^3\cdot 3^2\cdot 5^0,\ 2^3\cdot 3^0\cdot 5^1,\ 2^3\cdot 3^1\cdot 5^1,\ 2^3\cdot 3^2\cdot 5^1$

すなわち　$n=8,\ 24,\ 72,\ 40,\ 120,\ 360$

5．(1)　a は自然数とする。$a+5$ は 4 の倍数であり，$a+3$ は 9 の倍数であるとき，$a+21$ は 36 の倍数であることを証明せよ。

(2)　$a,\ k$ を自然数とする。このとき，a と $ka+1$ は互いに素であることを証明せよ。

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$a+5,\ a+3$ は，自然数 $m,\ n$ を用いて

$a+5=4m,\ a+3=9n$

と表される。

$a+21=(a+5)+16=4m+16=4(m+4)$　……①

$a+21=(a+3)+18=9n+18=9(n+2)$　……②

よって，① より $a+21$ は 4 の倍数であり，② より $a+21$ は 9 の倍数でもある。

したがって，$a+21$ は 4 と 9 の最小公倍数 36 の倍数である。

別解　（② を導くところまでは同じ）

①，② から　$4(m+4)=9(n+2)$

4 と 9 は互いに素であるから，$m+4$ は 9 の倍数である。

したがって，$m+4=9k$（k は自然数）と表される。

ゆえに　$a+21=4(m+4)=4\cdot 9k=36k$

したがって，$a+21$ は 36 の倍数である。

(2)　a と $ka+1$ の最大公約数を g とすると

$a=mg,\ ka+1=ng$　（$m,\ n$ は互いに素な自然数）

と表される。$a=mg$ を $ka+1=ng$ に代入すると

$kmg+1=ng$　すなわち　$(n-km)g=1$

$n,\ k,\ m,\ g$ は自然数であるから，この等式を満たすのは，$n-km=1,\ g=1$ の場合のみである。

したがって，a と $ka+1$ の最大公約数は 1 であるから，a と $ka+1$ は互いに素である。

6．(1)　238 と自然数 n の最大公約数が 14，最小公倍数が 1904 であるとき，n の値を求めよ。

(2)　2 桁の自然数 $m,\ n$ $(m<n)$ の最大公約数は 10，最小公倍数は 100 である。このとき，$m,\ n$ の値を求めよ。

解答　(1)　$n=112$　　(2)　$m=20,\ n=50$

解説

(1)　条件から　$238n=14\cdot 1904$

これを解いて　$n=\dfrac{14\cdot 1904}{238}=112$

別解　$238=14\cdot 17$ であるから，自然数 k を用いて

$n=14k$（k と 17 は互いに素）

と表される。

最小公倍数が 1904 であるから　$1904=14\cdot 17\cdot k$

よって　$k=8$　ゆえに　$n=14\cdot 8=112$

(2)　2 桁の自然数 $m,\ n$ の最大公約数が 10 であるから，

$m=10m',\ n=10n'$

と表される。ただし，$m',\ n'$ は互いに素で，$m'<n'$ である。

このとき，m，n の最小公倍数は $10m'n'$ と表されるから

$$10m'n'=100 \qquad \text{すなわち} \qquad m'n'=10$$

$m'n'=10$，$m'<n'$ を満たし，互いに素である m'，n' の組は

$$(m',\ n')=(1,\ 10),\ (2,\ 5)$$

よって　$(m,\ n)=(10,\ 100),\ (20,\ 50)$

このうち，m，n が 2 桁の自然数であるものは　$m=20$，$n=50$

7．$N=250!$ を素因数分解したとき，次の問いに答えよ。

(1)　素因数 5 の個数を求めよ。

(2)　N を計算すると，末尾には 0 は連続して何個並ぶか。

解答　(1)　62 個　　(2)　62 個

解説

(1)　1 から 250 までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は，250 を 5 で割った商で　50 (個)

5^2 の倍数の個数は，250 を 5^2 で割った商で　10 (個)

5^3 の倍数の個数は，250 を 5^3 で割った商で　2 (個)

よって，素因数 5 の個数は　$50+10+2=62$ (個)

(2)　1 から 250 までの自然数のうち 2 の倍数の個数は，125 個である。

よって，素因数 2 の個数は 125 個以上あるから，素因数 5 の個数よりも多い。

$2\cdot5=10$ であるから，N を計算したとき末尾に並ぶ 0 の個数は素因数 5 の個数に等しい。

ゆえに，(1) から　62 個

8．(1)　432 以下の自然数で，432 と互いに素であるものの個数を求めよ。

(2)　735 以下の自然数で，735 と互いに素であるものの個数を求めよ。

解答　(1)　144 個　　(2)　336 個

解説

(1)　$432=2^4\cdot3^3$

また　$432\div2=216$，$432\div3=144$，$432\div(2\cdot3)=72$

よって，432 以下の自然数で，2 の倍数または 3 の倍数の個数は

$$216+144-72=288$$

したがって，求める個数は　$432-288=144$ (個)

別解　$432=2^4\cdot3^3$

432 以下の自然数のうち，奇数は　$432\div2=216$ (個)

3 の倍数で奇数は　$432\div3\div2=72$ (個)

したがって，求める個数は　$216-72=144$ (個)

(2)　$735=3\cdot5\cdot7^2$

また　$735\div3=245$，$735\div5=147$，$735\div7=105$，

$735\div(3\cdot5)=49$，$735\div(5\cdot7)=21$，$735\div(7\cdot3)=35$，

$735\div(3\cdot5\cdot7)=7$

よって，735 以下の自然数で，3 の倍数または 5 の倍数または 7 の倍数の個数は

$$245+147+105-49-21-35+7=399$$

したがって，求める個数は　$735-399=336$ (個)

9．$\dfrac{34}{5}$，$\dfrac{51}{10}$，$\dfrac{85}{8}$ のいずれに掛けても積が自然数となる分数のうち，最も小さいものを求めよ。

解答　$\dfrac{40}{17}$

解説

求める分数を $\dfrac{b}{a}$ (a，b は互いに素である自然数) とする。

$\dfrac{34}{5}\times\dfrac{b}{a}$ は自然数となるから

a は 34 の約数，b は 5 の倍数　…… ①

$\dfrac{51}{10}\times\dfrac{b}{a}$ は自然数となるから

a は 51 の約数，b は 10 の倍数　…… ②

$\dfrac{85}{8}\times\dfrac{b}{a}$ は自然数となるから

a は 85 の約数，b は 8 の倍数　…… ③

求める分数 $\dfrac{b}{a}$ を最小にするには，a を最大にし，b を最小にするとよい。

よって，①，②，③ から

a は 34 と 51 と 85 の最大公約数，b は 5 と 10 と 8 の最小公倍数とすればよい。

したがって　$a=17$，$b=40$　　　よって，求める分数は　$\dfrac{40}{17}$

10．$\sqrt{n^2+21}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ。

解答　$n=2,\ 10$

解説

$\sqrt{n^2+21}=m$ (m は自然数) とおくと　$n^2+21=m^2$

よって　$m^2-n^2=21$

ゆえに　$(m+n)(m-n)=21$　…… ①

m，n は自然数であるから，$m+n$，$m-n$ は 21 の約数である。

$1\leqq m-n<m+n\leqq21$ に注意すると，① から

$$\begin{cases} m+n=21 \\ m-n=1 \end{cases} \ \cdots\cdots ② \qquad \text{または} \qquad \begin{cases} m+n=7 \\ m-n=3 \end{cases} \ \cdots\cdots ③$$

② を解くと　$m=11$，$n=10$　これらは自然数であるから適する。

③ を解くと　$m=5$，$n=2$　　これらは自然数であるから適する。

したがって　$n=2,\ 10$

11．(1)　$P=2x^2+11xy+12y^2-5y-2$ を因数分解せよ。

(2)　$P=56$ を満たす自然数 x，y の値を求めよ。

解答　(1)　$P=(x+4y+1)(2x+3y-2)$　　(2)　$x=3$，$y=1$

解説

(1)　$P=2x^2+11yx+(4y+1)(3y-2)$

$=(x+4y+1)(2x+3y-2)$

$$\begin{array}{lll} 1 & 4y+1 & \longrightarrow 8y+2 \\ 2 & 3y-2 & \longrightarrow 3y-2 \\ \hline 2 & (4y+1)(3y-2) & \quad 11y \end{array}$$

(2)　x，y は自然数であるから　$x\geqq1$，$y\geqq1$

また，$x+4y+1$，$2x+3y-2$ は整数であり

$$x+4y+1\geqq1+4\cdot1+1=6$$

$$2x+3y-2\geqq2\cdot1+3\cdot1-2=3$$

よって，$P=56$ を満たす整数 $x+4y+1$，$2x+3y-2$ の組は

$$(x+4y+1,\ 2x+3y-2)=(7,\ 8),\ (8,\ 7),\ (14,\ 4)$$

[1]　$(x+4y+1,\ 2x+3y-2)=(7,\ 8)$ のとき

$x=\dfrac{22}{5}$，$y=\dfrac{2}{5}$

x，y は自然数であるから，不適。

[2]　$(x+4y+1,\ 2x+3y-2)=(8,\ 7)$ のとき

$x=3$，$y=1$

x，y は自然数であるから，適する。

[3]　$(x+4y+1,\ 2x+3y-2)=(14,\ 4)$ のとき

$x=-3$，$y=4$

x，y は自然数であるから，不適。

[1]，[2]，[3] から，$P=56$ を満たす自然数 x，y の値は

$x=3$，$y=1$