数学演習（整数）Ｈ２６．２．１　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

１．3つの自然数 45，63，n の最大公約数が9，最小公倍数が 3150 のとき，n を求めよ。

２．$6n+9$ と $5n+8$ が互いに素となる 100 以下の自然数 n は全部で何個あるか。

３．方程式 $8x-7y=5$ の整数解をすべて求めよ。

４．13 で割ると 2 余り，9 で割ると 6 余るような自然数のうち，3桁で最小のものを求めよ。

５．方程式 $xy-2x+3y-1=0$ の整数解をすべて求めよ。

６．自然数 a, b, c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき，a，b のうち少なくとも一つは偶数であることを証明せよ。

7．次の計算をせよ。　$3112_{(4)} \times 33_{(4)}$

8．次の計算をせよ。　$100101001_{(2)} \div 1011_{(2)}$

9．nを自然数とする。$270!$ は3^n で割り切れるが 3^{n+1} では割り切れないという。n の値を求めよ。

10. 自然数Nを2進法で表すと5桁の数 $11a01_{(2)}$ となり，7進法で表すと2桁の数$3b_{(7)}$となるという。a，bを求めよ。また，Nを10進法で表せ。

11. nを自然数とする。$4 \cdot 16^n + 9 \cdot 3^n$ は13の倍数となることを示せ。

12. 2 次方程式 $x^2 - mx + 3m = 0$ が整数解のみをもつような定数 m の値をすべて求めよ。

1．3つの自然数 45, 63, n の最大公約数が9，最小公倍数が 3150 のとき，n を求めよ。

$45 = 3^2 \times 5$
$63 = 3^2 \times 7$
$n =$

最大公約数 3^2

↓

$3150 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$

よって $n = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^a$ $(a = 0, 1)$

ならばいい。ゆえに

$a=0$ … $2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^0 = 450$
$a=1$ … $2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^1 = 3150$

∴ $n = 450, 3150$

8

2．$6n+9$ と $5n+8$ が互いに素となる 100 以下の自然数 n は全部で何個あるか。

互除法より

$$\begin{array}{r|l|l} & 5 & 1 \\ n+1 & 5n+8 & 6n+9 \\ & 5n+5 & 5n+8 \\ \hline & 3 & n+1 \end{array}$$

$6n+9$ と $5n+8$ の最大公約数は
$n+1$ と 3 の最大公約数に等しい

$6n+9$ と $5n+8$ が互いに素

⟺ $6n+9$ と $5n+8$ の最大公約数が1
⟺ $n+1$ と 3 の最大公約数が1
⟺ $n+1$ が 3の倍数でなければいい。

$1 \leqq n \leqq 100$ より $2 \leqq n+1 \leqq 101$ であり 2以上101以下で 3の倍数は 33個あるから，$n+1$ が 3の倍数とならない n は

67個

8

3．方程式 $8x-7y=5$ の整数解をすべて求めよ。

とりあえず
$8x-7y=1$
をみたす x, y は
$8 \times 1 - 7 \times 1 = 1$
より，両辺を5倍して
$8 \times 5 - 7 \times 5 = 5$

よって

$$\begin{array}{rl} & 8x-7y=5 \\ -) & 8 \times 5 - 7 \times 5 = 5 \\ \hline & 8(x-5)-7(y-5)=0 \end{array}$$

∴ $8(x-5) = 7(y-5)$ …(*)

ゆえに 8と7は互いに素より
(*)から
$x-5 = 7k$ …(**)
つまり $x = 7k+5$
とおける。(**)を(*)に代入して
$8 \times 7k = 7(y-5)$
∴ $8k = y-5$
よって $y = 8k+5$

ゆえに
$$\begin{cases} x = 7k+5 \\ y = 8k+5 \end{cases}$$

8

4．13で割ると2余り，9で割ると6余るような自然数のうち，3桁で最小のものを求めよ。

求める自然数を n とすると
n は13で割ると2余るので
$n \equiv 2 \pmod{13}$ …①
また n は9で割ると6余るので
$n = 9x+6$ …②
とおける。（x は整数）
②を①に代入して
$9x+6 \equiv 15$
∴ $9x \equiv 9 \pmod{13}$
13と9は互いに素だから
$x \equiv 1 \pmod{13}$
よって k を整数として
$x = 13k+1$
と書けるので②に代入して
$n = 9(13k+1)+6$
$= 117k+15$
自然数 n について
3桁で最小のもの
を求めるので，
明らかに $k=1$ を
代入すればよく
$n = 117+15$
$= 132$

8

5．方程式 $xy-2x+3y-1=0$ の整数解をすべて求めよ。

$x(y-2)+3\{(y-2)+2\}-1=0$
$x(y-2)+3(y-2)+6-1=0$
$(x+3)(y-2) = -5$ …(*)

$x+3$ と $y-2$ は整数より
(*)から

$x+3$	1	5	-1	-5
$y-2$	-5	-1	5	1

よって

x	-2	2	-4	-8
y	-3	1	7	3

ゆえに
(x, y)
$= (-2, -3)$
$(2, 1)$
$(-4, 7)$
$(-8, 3)$

8

6．自然数 a, b, c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき，a, b のうち少なくとも一つは偶数であることを証明せよ。

背理法で示す。つまり $a^2+b^2=c^2$ を満たす自然数 a, b, c について
「a, b が両方とも奇数である」
と仮定する。すると mod 4 で考えると $a \equiv 1$, $a \equiv 3$ の 2通りしかないが，
$a \equiv 1$ のとき $a^2 \equiv 1^2 \equiv 1$,
$a \equiv 3$ のとき $a^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 1$ (mod 4 より)
となって，必ず $a^2 \equiv 1$ が成り立ち，b も同様で $b^2 \equiv 1$ となる。
したがって $a^2+b^2 \equiv 1+1 \equiv 2$ より，$a^2+b^2=c^2$ から
$c^2 \equiv 2$ …①
が成り立つ。しかし
$c \equiv 0 \Rightarrow c^2 \equiv 0$, $c \equiv 2 \Rightarrow c^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv 0$, $c \equiv 1, 3 \Rightarrow c^2 \equiv 1$
となって，すべての自然数 c について $c^2 \equiv 2$ となることはない。
これは①と矛盾する。//

10

50

7．次の計算をせよ。　$3112_{(4)} \times 33_{(4)}$

$3\times3=\cancel{9}$ 21（4進法なので）

$2\times3=\cancel{6}$ 12（4進法なので）

$4=10$（4進法なので）

$$\begin{array}{r} 3112 \\ \times\ 33 \\ \hline 22002 \\ 22002\ \ \\ \hline 302022 \end{array}$$

よって　$\underline{302022_{(4)}}$　(5)

8．次の計算をせよ。　$100101001_{(2)} \div 1011_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 11011 \\ 1011\,\overline{)\,100101001} \\ 1011 \\ \hline 1111 \\ 1011 \\ \hline 10000 \\ 1011 \\ \hline 1011 \\ 1011 \\ \hline 0 \end{array}$$

よって

商　$11011_{(2)}$

余り　$0_{(2)}$　(5)

9．nを自然数とする。270! は3^nで割り切れるが3^{n+1}では割り切れないという。nの値を求めよ。（改：早稲田大）

これは、270! を素因数分解したとき、3の指数がいくつか求めよということ。

（$45=3^2\times5$ は 3^2で割り切れるが、3^3で割り切れない）

よって、270! は1から270までの積なので

1から270までに

3の倍数 … $270\div3=90$個

3^2の倍数 … $270\div3^2=30$個

3^3の倍数 … $270\div3^3=10$個

3^4の倍数 … $270\div3^4=3$個

3^5の倍数 … $270\div3^5=1$個

$81\overline{)270}$ → 3 … 243, 27

$243\overline{)270}$ → 1 … 243

であるから、3の指数は

$$90+30+10+3+1=134$$

よって 270! は 3^{134}で割り切れるが3^{135}では割り切れない

$\therefore$ $\underline{n=134}$　(10)

10．自然数Nを2進法で表すと5桁の数$11a01_{(2)}$となり，7進法で表すと2桁の数$3b_{(7)}$となるという。a, bを求めよ。また，Nを10進法で表せ。

$11a01_{(2)}$を10進に直すと

$$11a01=1\times2^4+1\times2^3+a\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$$
$$=16+8+4a+0+1$$
$$=25+4a \quad \cdots①$$

$3b_{(7)}$を10進に直すと

$$3b=3\times7^1+b\times7^0=21+b \quad \cdots②$$

①②より

$25+4a=21+b$　$\therefore$ $4a+4=b$ … ③

ここで $11a01_{(2)}$は2進表記なので aは 0か1 … ④

$3b_{(7)}$は7進表記なので bは 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

となるが、③と④より $b=4, 8$ しかないので、

$b=8$は不適なので $\underline{b=4}$　このとき $\underline{a=0}$

またNは①に$a=0$を代入して $\underline{N=25}$　(10)

11．nを自然数とする。$4\cdot16^n+9\cdot3^n$は13の倍数となることを示せ。（改：信州大）

mod 13で考える。$16\equiv3 \pmod{13}$なので

$$4\times16^n+9\times3^n \equiv 4\times3^n+9\times3^n$$

3^nでくくる

$$\equiv(4+9)\times3^n$$
$$\equiv13\times3^n$$

$13\equiv0 \pmod{13}$

$$\equiv0\times3^n$$
$$\equiv0$$

ゆえに、nがいくつであっても $4\times16^n+9\times3^n\equiv0$ より

$4\times16^n+9\times3^n$は13の倍数　(10)

(別) 2項定理より

$$4\times16^n=4\times(13+3)^n$$
$$=4(\underbrace{13^n+{}_nC_1\cdot13^{n-1}\cdot3+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}\cdot13\cdot3^{n-1}}_{すべて13の倍数}+3^n)$$
$$=4(13M+3^n)$$

より、$4\times16^n+9\times3^n=4(13M+3^n)+9\times3^n=4\times13M+13\times3^n$ $\to$ $=13(4M+3^n)=13$の倍数 //

12．2次方程式$x^2-mx+3m=0$が整数解のみをもつような定数mの値をすべて求めよ。（改：岐阜薬科大）

解の公式より

$$x=\frac{m\pm\sqrt{m^2-4\cdot1\cdot3m}}{2}=\frac{m\pm\sqrt{m^2-12m}}{2} \quad \cdots(*)$$

$(*)$が整数になるためには、根号がはずれないといけない、つまり

$$m^2-12m=N^2$$

なる整数Nが存在すればいい。左辺を平方完成して

$$(m-6)^2-36=N^2$$

よって

$$(m-6)^2-N^2=36$$

$\therefore$

$$(m-6+N)(m-6-N)=36 \quad \cdots①$$

ここで $(m-6+N)+(m-6-N)=2(m-6)=$偶数

より $m-6+N$と$m-6-N$の偶奇は一致する

ゆえに

$m-6+N$	2	6	18	-2	-6	-18
$m-6-N$	18	6	2	-18	-6	-2

よって、足すと

$$2(m-6)=20,\ 12,\ 20,\ -20,\ -12,\ -20$$

つまり

$$2(m-6)=12,\ 20,\ -12,\ -20$$

解いて、$m=12,\ 16,\ 0,\ -4$

$(*)$より、もしかしたら $x=$分数になるかも

それぞれについて調べると

$m=12 \to x^2-12x+36=0$　$\therefore$ $(x-6)^2=0$

$m=16 \to x^2-16x+48=0$　$\therefore$ $(x-4)(x-12)=0$

$m=0 \to x^2=0$

$m=-4 \to x^2+4x-12=0$　$\therefore$ $(x+6)(x-2)=0$

より確かに整数解となる。　$\therefore$ $\underline{m=12,\ 16,\ 0,\ -4}$　(10)

(別)（解と係数の関係）← もうすぐ授業で扱います

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=3m$　（α, βは整数解）

よって $m=\alpha+\beta$を代入して　$\alpha\beta=3(\alpha+\beta)$

つまり $\alpha\beta-3\alpha-3\beta=0$ より $(\alpha-3)(\beta-3)=9$ … (☆)

(☆)より、α, βの値を出して、$m=\alpha+\beta$に代入してもよい。

/50