統一テスト（整数の性質A）Ｈ３０．８．２７　　( )組( )番　名前( )

$\boxed{1}$ 一の位の数がわからない5桁の自然数4183□が，5の倍数であり，3の倍数でもあるとき，一の位の数を求めよ。

$\boxed{2}$ ある2桁の整数を9倍して，36を引くと，百の位は7，一の位は1であるとき，もとの整数を求めよ。

$\boxed{3}$ $\sqrt{132n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

$\boxed{4}$ 900の正の約数の個数を求めよ。

$\boxed{5}$ 次の2つの整数が互いに素であるかどうかを答えよ。

(1)　9と13　　(2)　18と24

$\boxed{6}$ a は自然数とする。$a+3$ は5の倍数であり，$a+1$ は6の倍数であるとき，$a+13$ は30の倍数であることを証明せよ。

$\boxed{7}$ n は正の整数とする。n と20の最小公倍数が240となるような n をすべて求めよ。

$\boxed{8}$ a，b は整数とする。a を9で割ると1余り，b を9で割ると5余る。次の数を9で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$a+b$　　(2)　$2a^2+b^2$

$\boxed{9}$ 次の2つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。608，171

$\boxed{10}$ 次の方程式の整数解をすべて求めよ。$5x+8y=1$

$\boxed{11}$ 次の数を10進法で表せ。　$1103_{(4)}$

$\boxed{12}$ 次の10進数を[ ]内の表し方で表せ。　86　[3進法]

$\boxed{13}$ 次の数を10進法の小数で表せ。　$0.111_{(2)}$

$\boxed{14}$ 次の10進数を[ ]内の表し方で表せ。　0.625　[4進法]

統一テスト（整数の性質B）Ｈ３０．８．２７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 4 桁の自然数 257□ が 4 の倍数であるとき，□ に入る数をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ 135 の倍数で，正の約数の個数が 15 個である自然数 n を求めよ。

$\boxed{3}$ 252 との最小公倍数が 1008 である自然数の個数を求めよ。

$\boxed{4}$ 1 から 300 までの 300 個の自然数の積 $N=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot300$ を計算すると，末尾には 0 が連続して何個並ぶか。

$\boxed{5}$ n は整数とする。n が 3 の倍数でないならば，$2n^2-5$ は 3 の倍数であることを証明せよ。

$\boxed{6}$ n は自然数とする。$n^2-14n+40$ が素数となるような n をすべて求めよ。

$\boxed{7}$ 次の方程式の整数解をすべて求めよ。$xy-5x-y=0$

$\boxed{8}$ 5 で割ると 2 余り，14 で割ると 5 余る自然数のうち，3 桁で最小のものを求めよ。

$\boxed{9}$ 次の計算の結果を，2 進法で表せ。$11110_{(2)}+111_{(2)}$

$\boxed{10}$ 3 桁の自然数 N を 5 進法で表すと $a0b_{(5)}$ になり，7 進法で表すと，逆の並びの $b0a_{(7)}$ になるという。a，b を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

統一テスト（図形の性質A）H３０．８．２７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

1 一の位の数がわからない5桁の自然数 4183□ が，5の倍数であり，3の倍数でもあるとき，一の位の数を求めよ。

解答　5　(3)

解説
□ に入る数を a ($0 \leqq a \leqq 9$) とする。
4183□ が5の倍数であるから　$a=0,\ 5$
各位の数の和は　$4+1+8+3+a=a+16$
これが3の倍数であるとき，4183□ は3の倍数になる。
$a+16$ が3の倍数になるのは，$a=5$ のときである。
よって，求める数は　5

2 ある2桁の整数を9倍して，36を引くと，百の位は7，一の位は1であるとき，もとの整数を求めよ。

解答　83　(3)

解説
ある2桁の整数を x とする。
x を9倍して36引いた数は，$9x-36=9(x-4)$ より9の倍数であるから，各位の数の和は9の倍数になる。
よって，その十の位を b ($0 \leqq b \leqq 9$) とすると
$$7+b+1=b+8$$
ゆえに　$b=1$
したがって　$9(x-4)=711$
これを解いて　$x=83$
よって，求める整数は　83

3 $\sqrt{132n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。

解答　$n=33$　(3)

解説
$\sqrt{132n}$ が自然数になるには，$132n$ がある自然数の2乗になればよい。
132 を素因数分解すると　$132=2^2\cdot3\cdot11$
132 に $3\cdot11$ を掛けると，$2^2\cdot3^2\cdot11^2$ すなわち $(2\cdot3\cdot11)^2$ になる。
よって，求める自然数 n は　$n=3\cdot11=33$

4 900 の正の約数の個数を求めよ。

解答　27 個　(3)

解説
900 を素因数分解すると　$900=2^2\cdot3^2\cdot5^2$
よって，900 の正の約数の個数は
$$(2+1)(2+1)(2+1)=3\cdot3\cdot3=27\ (個)$$

5 次の2つの整数が互いに素であるかどうかを答えよ。
(1)　9 と 13　　　(2)　18 と 24

解答　(1)　互いに素である　(3)　(2)　互いに素でない　(3)

解説
(1)　$9=3^2$，13 は素数であるから，9 と 13 の最大公約数は 1 である。
よって，9 と 13 は互いに素である。
(2)　$18=2\cdot3^2$，$24=2^3\cdot3$ であるから，18 と 24 の最大公約数は $2\cdot3=6$ である。
よって，18 と 24 は互いに素でない。

6 a は自然数とする。$a+3$ は5の倍数であり，$a+1$ は6の倍数であるとき，$a+13$ は30の倍数であることを証明せよ。　(3)

解説
$a+3$，$a+1$ は，自然数 m，n を用いて
$$a+3=5m,\quad a+1=6n$$
と表される。
$$a+13=(a+3)+10=5m+10=5(m+2)\quad \cdots\cdots ①$$
また　$a+13=(a+1)+12=6n+12=6(n+2)\quad \cdots\cdots ②$
よって，① より $a+13$ は5の倍数であり，② より $a+13$ は6の倍数でもある。
5 と 6 は互いに素であるから，$a+13$ は $5\cdot6$ の倍数すなわち30の倍数である。 //

7 n は正の整数とする。n と 20 の最小公倍数が 240 となるような n をすべて求めよ。

解答　$n=48,\ 240$　(4)（各2）

解説
20，240 を素因数分解すると
$$20=2^2\cdot5,\quad 240=2^4\cdot3\cdot5$$
よって，20 との最小公倍数が 240 である正の整数は
$$2^4\cdot3\cdot5^a\quad (a=0,\ 1)$$
と表される。
したがって，求める整数 n は
$$n=2^4\cdot3\cdot5^0,\ 2^4\cdot3\cdot5^1$$
すなわち　$n=48,\ 240$

8 a，b は整数とする。a を9で割ると1余り，b を9で割ると5余る。次の数を9で割ったときの余りを求めよ。
(1)　$a+b$　　　(2)　$2a^2+b^2$

解答　(1)　6　(3)　(2)　0　(3)　←「余りなし」と答えない。

解説
a，b は，整数 k，l を用いて
$$a=9k+1,\quad b=9l+5$$
と表される。
(1)　$a+b=(9k+1)+(9l+5)=9(k+l)+1+5=9(k+l)+6$
よって，$a+b$ を9で割ったときの余りは　6
(2)　$2a^2+b^2=2(9k+1)^2+(9l+5)^2$
$=2(9^2k^2+2\cdot9k\cdot1+1^2)+(9^2l^2+2\cdot9l\cdot5+5^2)$
$=9(18k^2+4k+9l^2+10l)+2+25$
$=9(18k^2+4k+9l^2+10l+3)$
よって，$2a^2+b^2$ を9で割ったときの余りは　0

9 次の2つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。608，171

解答　19　(3)

解説
$608=171\cdot3+95$
$171=95\cdot1+76$
$95=76\cdot1+19$
$76=19\cdot4+0$
よって，最大公約数は　19

4	1	1	3
19) 76	) 95	) 171	) 608
76	76	95	513
0	19	76	95

10 次の方程式の整数解をすべて求めよ。$5x+8y=1$

解答　k は整数とする。　$x=8k-3,\ y=-5k+2$　(4)　他の表し方でも正しければO.K.

解説
$$5x+8y=1\quad \cdots\cdots ①$$
$x=-3$，$y=2$ は，① の整数解の1つである。
よって　$5\cdot(-3)+8\cdot2=1\quad \cdots\cdots ②$
① − ② から　$5\{x-(-3)\}+8(y-2)=0$
すなわち　$5(x+3)+8(y-2)=0\quad \cdots\cdots ③$
5 と 8 は互いに素であるから，③ のすべての整数解は
$$x+3=8k,\ y-2=-5k\quad (k は整数)$$
したがって，① のすべての整数解は
$$x=8k-3,\ y=-5k+2\quad (k は整数)$$

11 次の数を10進法で表せ。　$1103_{(4)}$

解答　83　(3)

解説
$1103_{(4)}=1\cdot4^3+1\cdot4^2+0\cdot4^1+3\cdot4^0=64+16+0+3=83$

12 次の10進数を［ ］内の表し方で表せ。　86　［3進法］

解答　$10012_{(3)}$　(3)

解説
86 を3で割り，商を3で割る割り算を繰り返すと右のようになる。
余りを逆順に並べて　$10012_{(3)}$

	余り
3) 86	
3) 28	… 2
3) 9	… 1
3) 3	… 0
3) 1	… 0
0	… 1

13 次の数を10進法の小数で表せ。　$0.111_{(2)}$　$\frac{7}{8}$ を小数になおす。

解答　0.875　(3)

解説
$$0.111_{(2)}=1\cdot\frac{1}{2^1}+1\cdot\frac{1}{2^2}+1\cdot\frac{1}{2^3}=0.5+0.25+0.125=0.875$$

14 次の10進数を［ ］内の表し方で表せ。　0.625　［4進法］

解答　$0.22_{(4)}$　(3)

解説
0.625 に4を掛け，小数部分に4を掛けることを繰り返すと右のようになる。
出てきた整数部分を順に並べて　$0.22_{(4)}$

$$\begin{array}{r} 0.625 \\ \times\quad 4 \\ \hline 2.500 \\ \times\quad 4 \\ \hline 2.0 \end{array}$$

統一テスト（図形の性質B）Ｈ３０．８．２７（各5点）　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1 4 桁の自然数 257□ が 4 の倍数であるとき，□ に入る数をすべて求めよ。

解答　2，6　　片方のみ③

□ に入る数を $a\ (0 \leqq a \leqq 9)$ とする。

下 2 桁が 4 の倍数であるとき，4 桁の自然数は 4 の倍数になる。

下 2 桁が 4 の倍数になるのは，$a=2,\ 6$ のときである。

よって，求める数は　2，6

2 135 の倍数で，正の約数の個数が 15 個である自然数 n を求めよ。

p^{14}の不適も言えるように

解答　$n=2025$

n の正の約数の個数が $15=15\cdot1=3\cdot5$ であるから，n を素因数分解すると

$$p^{14},\quad p^2\cdot q^4\ (p,\ q\ は異なる素数)$$

のいずれかの形で表される。

n は 135 の倍数であり，$135=5\cdot3^3$ であるから，n は p^2q^4 の形で表される。

よって，求める自然数 n は　$n=5^2\cdot3^4=2025$

3 252 との最小公倍数が 1008 である自然数の個数を求めよ。

解答　6 個

252，1008 を素因数分解すると

$$252=2^2\cdot3^2\cdot7,\qquad 1008=2^4\cdot3^2\cdot7$$

よって，252 との最小公倍数が 1008 である正の整数は

$$2^4\cdot3^a\cdot7^b\qquad (a=0,\ 1,\ 2\ ;\quad b=0,\ 1)$$ ③

で表される。

したがって，求める自然数の個数は　$3\times2=6$　(個)

4 1 から 300 までの 300 個の自然数の積 $N=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot300$ を計算すると，末尾には 0 が連続して何個並ぶか。

解答　74 個

1 から 300 までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は，300 を 5 で割った商で　60

5^2 の倍数の個数は，300 を 5^2 で割った商で　12

5^3 の倍数の個数は，300 を 5^3 で割った商で　2

よって，N を素因数分解したときの素因数 5 の個数は　$60+12+2=74$　(個)

末尾の 0 の個数を求めるには，因数 10 の個数がわかればよい。

$10=2\cdot5$ であり，素因数 2 の個数は明らかに素因数 5 の個数より多いから，因数 10 の個数は素因数 5 の個数に等しい。

よって，N を計算すると，末尾には 0 が連続して 74 個並ぶ。

5 n は整数とする。n が 3 の倍数でないならば，$2n^2-5$ は 3 の倍数であることを証明せよ。

解答　略

ポ　$3k\pm1$としてもよい

注　$3k+1$だけ調べている人多し

n は 3 の倍数でないから，整数 k を用いて

$$3k+1,\quad 3k+2$$

のいずれかの形で表される。

[1]　$n=3k+1$ のとき

$$2n^2-5=2(3k+1)^2-5=2(9k^2+6k+1)-5=18k^2+12k-3=3(6k^2+4k-1)$$

[2]　$n=3k+2$ のとき

$$2n^2-5=2(3k+2)^2-5=2(9k^2+12k+4)-5=18k^2+24k+3=3(6k^2+8k+1)$$

よって，いずれの場合も，$2n^2-5$ は 3 の倍数である。

別解　$mod\ 3$で考えると，nは3の倍数ではないので $n\equiv\pm1$ である。

ここで，$2n^2-5\equiv2(\pm1)^2-5\equiv-3\equiv0$ より，$2n^2-5$ は3の倍数となる。

6 n は自然数とする。$n^2-14n+40$ が素数となるような n をすべて求めよ。

解答　$n=3,\ 11$　　片方のみ③

$n^2-14n+40=(n-4)(n-10)=(4-n)(10-n)$

$n-4>n-10$，$4-n<10-n$ であるから，$n^2-14n+40$ が素数であるとき

$$n-10=1\quad または\quad 4-n=1$$

すなわち　$n=11$　または　$n=3$

$n=11$ のとき　$n^2-14n+40=(11-4)(11-10)=7$ (素数)

$n=3$ のとき　$n^2-14n+40=(4-3)(10-3)=7$ (素数)

よって，$n^2-14n+40$ が素数となるような n は　$n=3,\ 11$

注　$n-4=1$

∴ $n=5$のとき

$(5-4)(5-10)$

$=-5$

負の数は素数ではない。

7 次の方程式の整数解をすべて求めよ。$xy-5x-y=0$

解答　$(x,\ y)=(2,\ 10),\ (6,\ 6),\ (0,\ 0),\ (-4,\ 4)$

$xy-5x-y=(x-1)(y-5)-5$ であるから

$$(x-1)(y-5)-5=0$$

すなわち　$(x-1)(y-5)=5$　③

$x,\ y$ は整数であるから，$x-1,\ y-5$ も整数である。

注　これを忘れている人多し

ゆえに　$(x-1,\ y-5)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (-1,\ -5),\ (-5,\ -1)$

よって　$(x,\ y)=(2,\ 10),\ (6,\ 6),\ (0,\ 0),\ (-4,\ 4)$

8 5 で割ると 2 余り，14 で割ると 5 余る自然数のうち，3 桁で最小のものを求めよ。

解答　117

求める自然数を n とすると，n は整数 $x,\ y$ を用いて，次のように表される。

$$n=5x+2,\qquad n=14y+5$$

よって　$5x+2=14y+5$

すなわち　$5x-14y=3$　……①

$x=-5,\ y=-2$ は，$5x-14y=3$ の整数解の 1 つであるから

$$5\cdot(-5)-14\cdot(-2)=3\quad……②$$

①−② から　$5(x+5)-14(y+2)=0$　……③

5 と 14 は互いに素であるから，③ を満たす整数 x は

$$x+5=14k\quad すなわち\quad x=14k-5\quad (k\ は整数)$$ ③

と表される。

したがって　$n=5x+2=5(14k-5)+2=70k-23$

$70k-23$ が 3 桁で最小となるのは，$k=2$ のときで

$$n=70\cdot2-23=117$$

9 次の計算の結果を，2 進法で表せ。$11110_{(2)}+111_{(2)}$

解答　$100101_{(2)}$

$11110_{(2)}+111_{(2)}=100101_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 11110_{(2)} \\ +\quad 111_{(2)} \\ \hline 100101_{(2)} \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 30 \\ +\ \ 7 \\ \hline 37 \end{array}$$ ③

10 3 桁の自然数 N を 5 進法で表すと $a0b_{(5)}$ になり，7 進法で表すと，逆の並びの $b0a_{(7)}$ になるという。$a,\ b$ を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

解答　$a=4,\ b=2,\ N=102$

$a0b_{(5)}$ は 5 進数であるから

$$1\leqq a\leqq4,\ 0\leqq b\leqq4\quad……①$$

$b0a_{(7)}$ は 7 進数であるから

$$1\leqq b\leqq6,\ 0\leqq a\leqq6\quad……②$$

①，② から　$1\leqq a\leqq4,\ 1\leqq b\leqq4$　……③

N を 10 進法で表すと

$$N=a0b_{(5)}=a\cdot5^2+0\cdot5^1+b\cdot5^0=25a+b$$

$$N=b0a_{(7)}=b\cdot7^2+0\cdot7^1+a\cdot7^0=49b+a$$

よって　$25a+b=49b+a$

整理すると　$a=2b$

これと ③ から　$(a,\ b)=(2,\ 1),\ (4,\ 2)$

[1]　$(a,\ b)=(2,\ 1)$ のとき

$$N=25\cdot2+1=51$$

これは 3 桁の数でないから適さない。

[2]　$(a,\ b)=(4,\ 2)$ のとき

$$N=25\cdot4+2=102$$

これは 3 桁の数であるから，適する。

したがって　$a=4,\ b=2,\ N=102$　(各1)